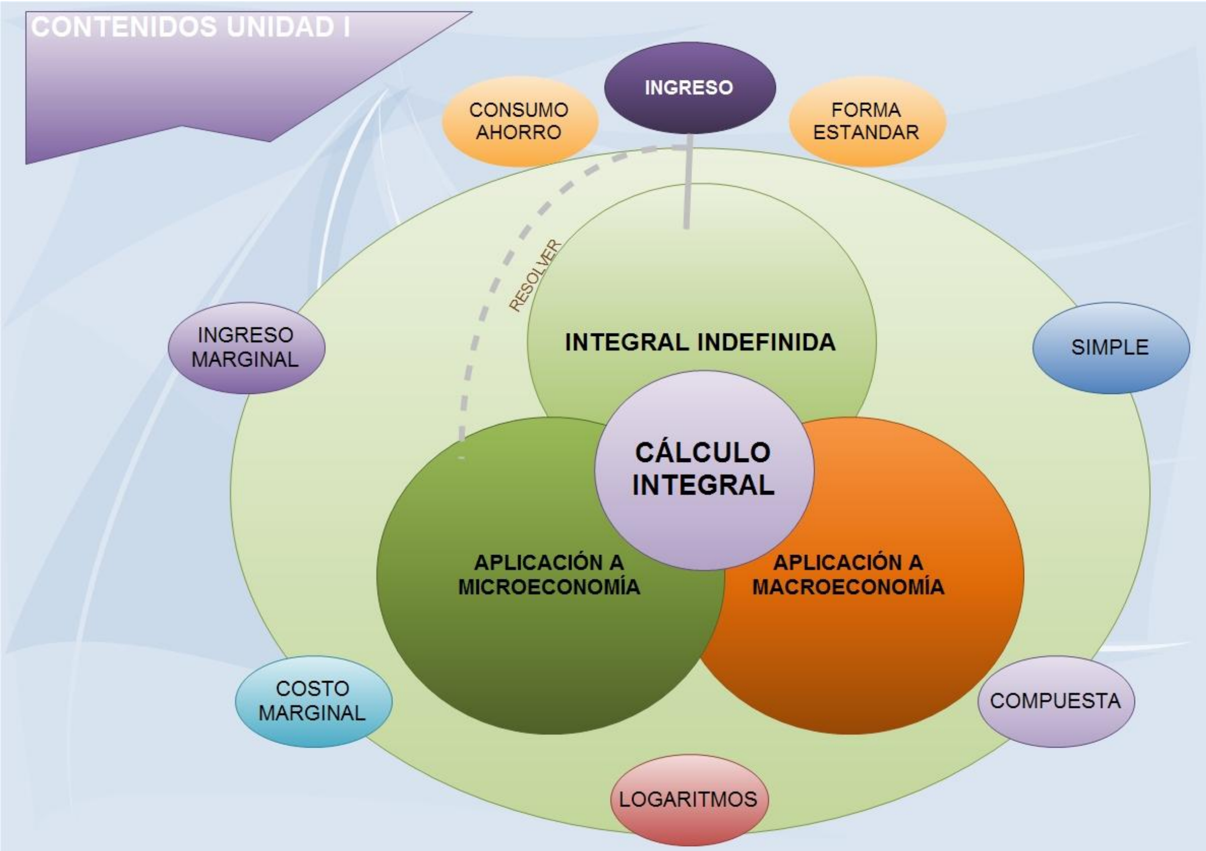
DESARROLLO DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS DE LA ASIGNATURA.

UNIDAD 1: *CÁLCULO INTEGRAL*.
***OBJETIVO DE LA UNIDAD*.-** Aplicar las reglas del cálculo integral a problemas relacionados con la Integración Indefinida y su aplicación a la administración y economía.



1. CALCULO INTEGRAL

Cálculo, rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de los incrementos en las variables, pendientes de curvas, valores máximo y mínimo de funciones y de la determinación de longitudes, áreas y volúmenes. Su uso es muy extenso, sobre todo en ciencias e ingeniería, siempre que haya cantidades que varíen de forma continua (Corporation, 2007).

La integral tiene dos interpretaciones: como un procedimiento inverso de la diferenciación y como un método de determinar el área debajo de una curva. Cada una de estas interpretaciones tiene diversas aplicaciones en economía y administración.

Como una operación, la integración es la inversa de la diferenciación ya que si una función es diferenciada y luego se integra la función obtenida, el resultado es la función original.

En este contexto la integración es el proceso de hallar una función cuando se conoce su derivada. En economía puede utilizase para hallar la función de costo total cuando se da la función de costo marginal, para hallar la función de ingreso total cuando se da la función de ingreso marginal, etc.

La integración como un método para determinar áreas debajo de una curva, se desarrolló con el propósito de evaluar áreas suponiendo divididas en un número infinito de partes infinitesimalmente pequeñas cuya suma es el área requerida.

El signo integral es la S alargada que usaron los primeros autores para indicar suma. En economía puede evaluarse el ingreso total como el área bajo la curva de ingreso marginal, el superávit del consumidor y el superávit del productor pueden evaluarse como áreas bajo la curva de demanda y de oferta.

Las técnicas de integración en su aplicación más amplia son de por sí más difíciles que las de diferenciación. Los casos más sencillos de integración se llevan a cabo invirtiendo las correspondientes fórmulas de la diferenciación.

1.1 INTEGRAL INDEFINIDA O ANTIDERIVADA

"El proceso de determinar una función cuya derivada se conoce se llama integración y la función que se busca se llama integral o anti derivada de la función propuesta" (Draper, 1976, pág. 398).

Si F(*x*) es una integral con respecto a *x* de la función f(*x*), la relación entre ellas se expresa:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

en la cual el miembro de la izquierda se lee "integral de f de *x* con respecto a *x*" . El símbolo $\int$ es un signo integral, f(*x*) es el integrando F(*x*) es una integral particular, C es la constante de integración y F(*x*) + C es la integral indefinida.

C es una constante cualquiera, puesto que la derivada de cualquier constante es cero. Así la integral no queda completamente determinada, una función cuya derivada se da, porque contiene una constante aditiva arbitraria, que es la constante de integración.

En muchas aplicaciones de la integración, cierta información dada en el problema (mencionada como una condición inicial o límite) únicamente especifica la constante de integración.

Ejemplo.

La integral de f(*x*) = 4x – 3 puede obtenerse invirtiendo las formulas apropiadas de la diferenciación.

$$\int (4x-3)dx = 2x^2 - 3x + C$$

Nótese que $\frac{d}{dx}(2x^2 - 3x + C) = 4x - 3$, sin considerar el valor de C.

Las reglas (o forma estándar) para la integración que se usaron en el ejemplo, se obtienen directamente al invertir las correspondientes reglas para la diferenciación y pueden resumirse a continuación:

REGLAS DE INTEGRACIÓN BÁSICAS:

1) **REGLA DE LA POTENCIA**:

Su función integrada es igual a la variable elevada a la potencia más uno, que divide a esa potencia más uno y más la constante de integración.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

2) **REGLA DE UNA CONSTANTE POR UNA VARIABLE:**
Se multiplica la constante por la integral de la variable y su función integrada es igual a la constante por la variable integrada y más la constante de integración.

$$\int kxdx = k\int xdx \quad = \quad k\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

3) **REGLA DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE FUNCIONES:**
En este caso se integra cada una de las funciones.

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

4) **REGLA DE LA CONSTANTE:**
Esta función al integrar es igual a la constante por la variable más la constante de integración.

$$\int kdx = k\int dx = kx + C$$

5) **REGLA DE EXCEPCIÓN:**
Esta regla es la excepción de la primera regla, que se la aplica para superar la parte indefinida de la función.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

6) **REGLA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL:**

$$\int e^x dx = e^x + C$$

EJERCICIOS RESUELTOS

$$1. \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

$$2. \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$3. \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4} x^{4/3} + C$$

$$4. \int (3x+5)dx = \int 3x dx + \int 5 dx = 3\int x dx + 5\int dx = 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + 5x = \frac{3}{2}x^2 + 5x + C$$

$$5. \int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \int x^{1/2}\left(x + x^{-1}\right)dx = \int \left(x^{3/2} + x^{-1/2}\right)dx = \int x^{3/2} + \int x^{-1/2} =$$

$$\frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{5}x^{5/2} + 2x^{1/2} + C$$

$$6. \int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}} dt = 5\int \frac{t^2}{t^{4/3}} dt + 7\int \frac{1}{t^{4/3}} dt = 5\int t^{2/3} dt + 7\int t^{-4/3} dt = 5\left(\frac{t^{5/3}}{5/3}\right) + 7\left(\frac{t^{-1/3}}{-1/3}\right) + C =$$

$$5\left(\frac{3}{5}t^{5/3}\right) + 7\left(-3t^{-1/3}\right) + C$$

7. Una función de costo marginal está dada por: C´(x) = $3x^2 + 8x + 4$ y el costo fijo es de \$6. Determine la función de costo total correspondiente.

$$\int (3x^2 + 8x + 4)dx = 3\int x^2 dx + 8\int x dx + 4\int dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + 4x =$$

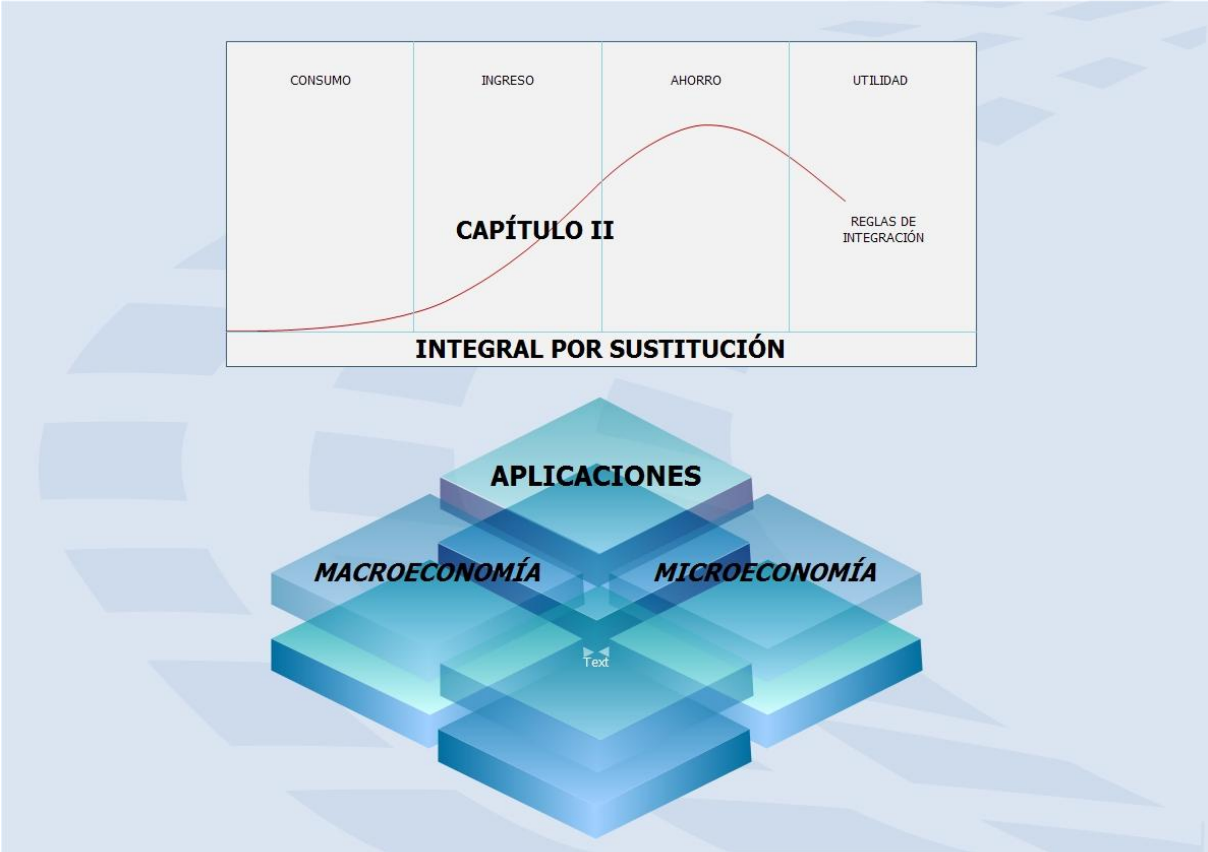
$$x^3 + 4x^2 + 4x + C \qquad \textit{Función de costo total}$$

$$CT(x) = CV + CF \qquad \textit{Costo fijo} = 6$$

$$CT(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 6$$

1.1.1. *INTEGRAL POR SUSTITUCIÓN.*

OBJETIVO: Aplicar las reglas de integral por sustitución a problemas relacionados con la Integración Indefinida y su aplicación a la administración y economía.



"No todas las integrales se pueden evaluar directamente usando la forma estándar, aunque existe una manera de reducir a una integral estándar mediante un cambio en las variables de integración. Este método se llama Método de Sustitución que es aplicable a funciones" (Arya & Lardner, 2009, pág. 637).

Si F es una anti derivada de f, de forma tal $\int f(x)dx = F(x) + C$

Que al sustituir podemos cambiar el nombre de la variable de x por u:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

En el método de sustitución el teorema establece que podemos reemplazar (u) por g(x), en donde (g) es una función diferenciable. En la sustitución (du) se trata como una diferencial (primera derivada), du = g´(x) dx.

$$\int [g(x)]^n g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

Ejemplo.

Evalúe $\int (x^2 + 3x - 7)^5 (2x + 3)dx$

La función es $(x^2 + 3x – 7)$ que esta elevada a la potencia 5 y su derivada es (2x + 3)dx, por lo tanto hacemos $x^2 + 3x – 7 = u$. Luego (2x + 3)dx = du. Usando esta sustitución, la integral se reduce a:

$$u = x^2 + 3x - 7$$

$$dx = \frac{du}{(2x+3)}$$

$$\int (x^2 + 3x - 7)^5 (2x+3)dx = \int u^5 \frac{(2x+3)}{(2x+3)} du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{6}(x^2 + 3x - 7)^6 + C$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Evalúe* $\int \sqrt{3x+4}dx$

$u = 3x+4 \quad du = 3dx$

$dx = \dfrac{du}{3}$

$$\int u^{1/2}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1}\right) + C =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + C = \frac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C$$

2. Si x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es de p dólares, obtenga una ecuación que contenga a p y x (la ecuación de demanda) de una mercancía para la cual la función de ingreso marginal está dada por $R'(x) = 4 + 10(x+5)^{-2}$

$$\int 4+10(x+5)^{-2}dx = 4\int dx + 10\int (x+5)^{-2}dx = 4x + 10\int u^{-2}du =$$

$$4x + 10\left(\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\right) + C = 4x + 10\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right) + C = 4x - \frac{10}{u} + C =$$

$$R = 4x - \frac{10}{(x+5)} + C \quad como \quad x=0 \quad C=2$$

$$R = 4x - \frac{10}{(x+5)} + 2 = \frac{4x(x+5) - 10 + 2(x+5)}{(x+5)} =$$

$$R = \frac{4x^2+22x}{(x+5)} \; Ingreso\ Total$$

Como Ingreso(R) = Precio(P) × Cantidad(X), se despeja el precio y se obtiene la curva de demanda.

$$\mathrm{R} = \mathrm{P.X} \qquad \mathrm{P} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{X}}$$

$$P = \frac{4x^2+22x}{x(x+5)} = \frac{4x+22}{x+5} \; Curva\, de\ Demanda$$

1.1.2. APLICACIONES EN ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA

En administración y economía la variación de una cantidad con respecto a otra cantidad x se analiza usualmente en términos de dos conceptos: una variación promedio y una variación marginal. De la misma forma en que una variación marginal puede obtenerse derivando una función, la función puede obtenerse al integrar su variación marginal (Haeussler, 2015).

COSTO.

Si el costo total (*y*) de producir y comercializar (*x*) unidades de una mercancía está dada por la función: y = *f*(*x*)

El costo promedio por unidad es: $\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x}$

Y el costo marginal es: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Es decir, el costo marginal es la primera derivada *f´*(*x*) de la función de costo total y = *f*(*x*) con respecto a (*x*). Por lo tanto el costo total es la integral con respecto a (x) de la función de costo marginal.

$$y = \int f'(x)dx = f(x) + C$$

Para obtener una única función de costo total al integrar la correspondiente función de costo marginal, debe especificarse una condición inicial. Normalmente esta especificación se hace en términos de un costo fijo o gastos generales, es decir, el costo cuando *x* = 0.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. El costo marginal *y´* como función de las unidades producidas x, está dado por:
   y´ = 1064 – 0.005x

Si el costo fijo es 16.3, hallar las funciones de costo total y costo promedio.

$$y = \int (1064 - 0.005x)dx = 1064x - 0.0025x^2 + C$$

Si x = 0, y = 16.3, se deduce C = 16.3 y se tiene

$$y = 16.3 + 1064x + 0.0025x^2 \qquad \text{Costo Total}$$

$$\frac{y}{\mathrm{x}} = \frac{16.3}{x} + 1064 - 0.0025x \qquad \text{Costo Promedio}$$

INGRESO.

Para cualquier función de demanda y = *f*(*x*) en la cual (*y*) es el precio por unidad y (*x*) es el número de unidades, el ingreso total (R) es el producto de (*x*) y (*y*), es decir R = *x.y* = *x. f*(*x*).

El ingreso marginal con respecto a la demanda es la derivada del ingreso total con respecto a (*x*). $\frac{dR}{dx} = R'(x)$

Por lo tanto el ingreso total es la integral con respecto a (*x*) de la función ingreso marginal.

$$R = \int R'(x)dx$$

$$\int R'(x)dx = R(x) + C$$

Para obtener una única función de Ingreso total al integrar la correspondiente función de Ingreso marginal, debe especificarse una condición inicial. Para evaluar la constante de integración puede usarse la condición inicial de que el ingreso es cero cuando la demanda es cero.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si la función de ingreso marginal es R´(x) = 12 – 8x + x^2
Determinar las funciones de ingreso y de demanda.

$$R(x) = \int (12 - 8x + x^2)dx = 12x - 4x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C$$

Si x = 0, R = 0, se deduce C = 0 y se tiene

$$R = 12x - 4x^2 + \frac{1}{3}x^3 \quad \text{Ingreso Total}$$

$$y = \frac{R}{x} = 12 - 4x + \frac{1}{3}x^2 \quad \text{Curva de Demanda}$$

RENTA NACIONAL CONSUMO Y AHORRO.

Si la función consumo está dada por c = $f(x)$ en la cual c es el consumo nacional total y (x) es la renta nacional total, entonces la propensión marginal a consumir es la derivada de la función de consumo con respecto a (x).

$$\frac{dc}{dx} = f'(x)$$

y suponiendo que x = c + s, en donde s son los ahorros, la propensión marginal a ahorrar es

$$\frac{ds}{dx} = 1 - \frac{dc}{dx}$$

El consumo nacional total es la integral con respecto a (x) de la propensión marginal a consumir.

$$c = \int f'(x)dx = f(x) + C$$

Se debe especificar una condición inicial para obtener una única función de consumo al integrar la correspondiente propensión marginal a consumir.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. La propensión marginal a consumir (en billones de dólares) es

$$\frac{dc}{dx} = 0.7 + \frac{0.2}{\sqrt{x}}$$

Cuando la renta es cero, el consumo es 8 billones de dólares. Hallar la función de consumo.

$$c = \int \left(0.7 + \frac{0.2}{\sqrt{x}}\right)dx = 0.7\int dx + 0.2\int x^{-1/2}dx = 0.7x + 0.4\sqrt{x} + C$$

Si x = 0, c = 8, se deduce C = 8 y se tiene

$$c = 8 + 1.7x + 0.4\sqrt{x}$$

2. La propensión marginal a ahorrar es 1/3. Cuando la renta es cero el consumo es 11 billones de dólares. Hallar la función de consumo.

$$\frac{dc}{dx} = 1 - \frac{ds}{dx} = \frac{2}{3}$$

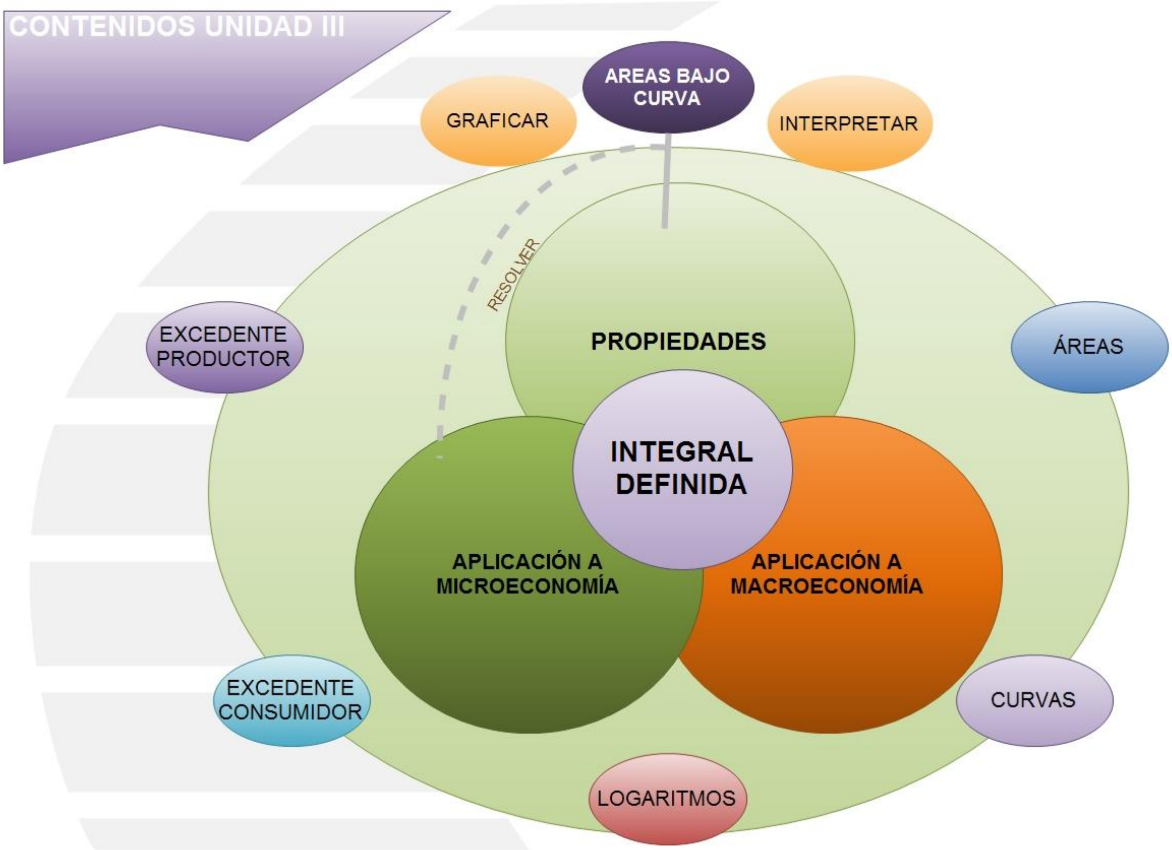
$$c = \int \frac{2}{3} dx = \frac{2}{3} x + C$$

Si x = 0, c = 11, se deduce C = 11, y

$$c = \frac{2}{3} x + 11$$

1.2. INTEGRAL DEFINIDA.

OBJETIVO: Utilizar el método de integración definida del cálculo integral y aplicarlo a problemas de administración y economía.



1.2.1. . INTEGRACIÓN DEFINIDA O AREAS BAJO LA CURVA.

"Sea $f(x)$ una función con una anti derivada que denominamos F(x). Sean a y b dos números reales tales que $f(x)$ y F(x) existen para todos los valores de x en el intervalo cerrado con puntos extremos a y b. Entonces la integral definida de $f(x)$ de x = a a x = b se denota por $\int_a^b f(x)dx$ y se define por

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - f(a)$$

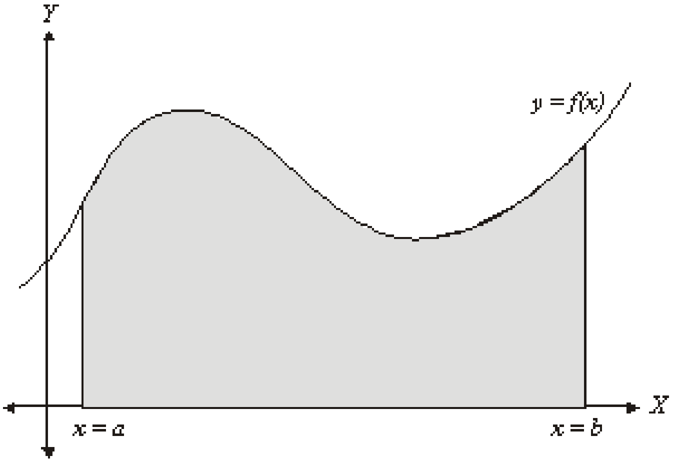
Los números a y b se denominan los límites de integración, a es el límite inferior y b es el límite superior" (Arya & Lardner, 2009, pág. 659).

Al evaluar integrales definidas, se omite la constante de integración de la antiderivada de $f(x)$ porque esta constante de integración se cancela en la respuesta final. El método de integración definida es un procedimiento que nos permiten calcular el área bajo una curva.

Teorema fundamental del cálculo.

Sea $f(x)$ una función continua no negativa en $a \leq x \leq b$ y sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$. Entonces A, el área entre $y = f(x)$, el eje x y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$, está dada por la integral definida.

$$Area = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

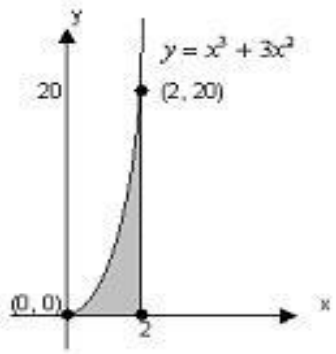


EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar el área limitada por la curva $y = x^3 + 3x^2$ por el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

$$A = \int_0^2 (x^3 + 3x^2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3\right]_0^2 =$$

$$\frac{2^4}{4} + 2^3 - \left[\frac{0^4}{4} + 0^3\right] = 12$$



2. El costo marginal de producir la unidad número x de cierto artículo es:

$$C'(x) = 6 - 0.02x.$$

Encuentre el cambio en el costo total de producción si el nivel de producción se incrementa de 150 a 200.

Solución. El incremento en el costo total está dado por:

$$\int_{150}^{200} (6 - 0.02x)dx = \left[6x - 0.01x^2\right]_{150}^{200} =$$

$$6(200) - 0.01(200)^2 - \left[6(150) - 0.01(150)^2\right] = 125 \quad \text{Incremento en el Costo}$$

INTERPRETACIÓN DE ÁREAS NEGATIVAS.

Si f(x) es negativa, es decir, si la curva y = f(x) queda debajo de x el valor de la integral es negativo, lo cual indica solamente que el área esta debajo del eje de las x y se considera por lo tanto el valor absoluto. El área situada por debajo del eje x, acotada por la curva y = f(x) y las rectas x = a y x = b, está dada por la integral definida:

$$-\int_a^b f(x)dx$$

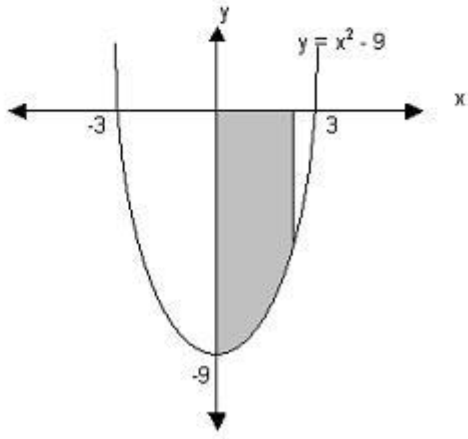
Ejemplo.

1. Determine el área acotada por $y = x^2 - 9, x = 0, x = 2$ y el eje x

La gráfica de y = x^2 – 9 está debajo de x si 0 ≤ x ≤ 2. El área solicitada está dada por:

$$-\int_0^2 (x^2 - 9)dx = \int_0^2 (9 - x^2)dx = \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 =$$

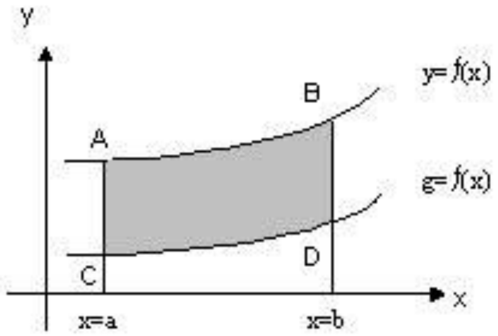
$$9(2) - \frac{2^3}{3} - \left[9(0) - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{46}{3}$$ Unidades cuadradas



1.2.2. ÁREA ENTRE CURVAS.

Si consideramos el área acotada entre las curvas y = f(x) y y = g(x) y las líneas x=a y x=b. El área formada será igual a:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



Nótese que el primer término está relacionado con la curva superior y el segundo término con la curva inferior, por consiguiente: $\int_a^b (y_{\text{superior}} - y_{\text{inf}erior})dx$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Encontrar el área limitada por las curvas γ = x^2 y γ = x

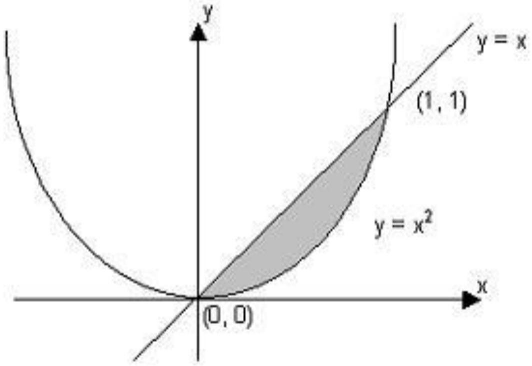
Solución. Primero se determina la intersección de las curvas igualando las ecuaciones.

$$x^2 = x$$
$$x^2 - x = 0$$
$$x(x-1) = 0$$
$$x = 0,\ x = 1$$

Se deduce que los limites estan entre x=0 y x=1

$$A = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ Unidades cuadradas



2. Determine el área de la región encerrada por las curvas γ = -x^2 y γ = x^2 - 8

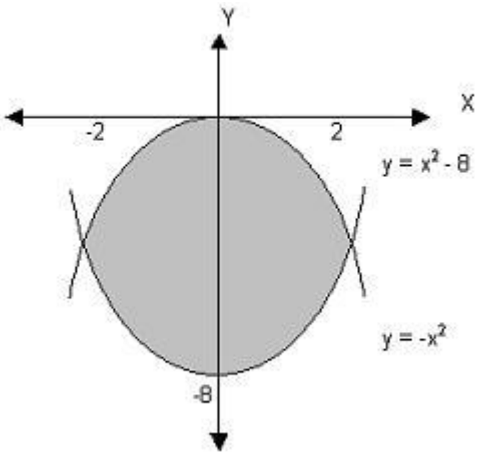
Solución. Se determina la intersección de las curvas igualando las ecuaciones.

$$-x^2 = x^2 - 8$$
$$2x^2 = 8$$
$$x = \sqrt{4} = \pm 2$$

En consecuencia los limites están entre x = -2 y x = +2

$$A = \int_{-2}^{2} -x^2 - (x^2 - 8)dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)dx =$$

$$\left[8x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(-16 + \frac{16}{3}\right) = \frac{64}{3}$$



1.2.3. APLICACIONES EN ADMINISTRACIÓN Y ECONOMIA.

La integración definida tiene una variedad de aplicaciones en la administración y economía. Los conceptos de excedente del consumidor y excedente del productor son dos ejemplos de tales aplicaciones.

EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR Y EXCEDENTE DEL PRODUCTOR.

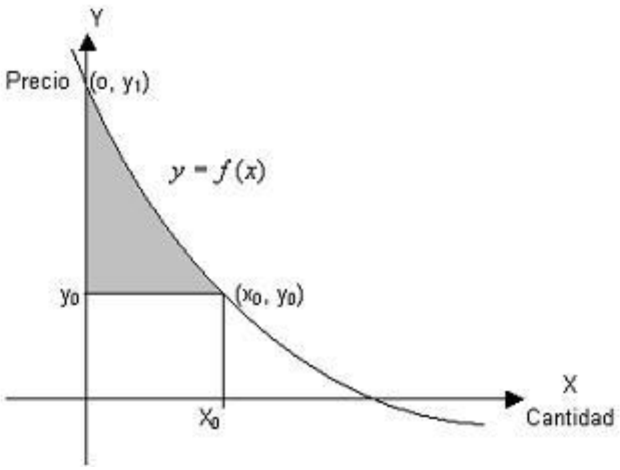
OBJETIVO.- Dada una función de oferta y de demanda, hallar el excedente del consumidor y el excedente del productor en el equilibrio de mercado.

EXCEDENTE DEL CONSUMIDOR

"Una función de demanda representa las cantidades de un artículo que podrían comprarse a varios precios. Si el precio de mercado es γ_0 y la correspondiente demanda en el marcado es X_0, entonces aquellos consumidores que estuviesen dispuestos a pagar un precio mayor que el de este mercado, ganan, por el hecho de que el precio es solamente γ_0" (Draper, 1976, pág. 426).

Bajo ciertas hipótesis la ganancia total del consumidor se representa por el área situada por debajo de la curva de demanda y por encima de la recta $y = y_0$. Marshall denomina a esta área el excedente del consumidor y se evalúa como:

$$\textit{Excedente} \text{ del Consumidor} = \int_o^{xo} f(x)dx - x_0 y_0$$

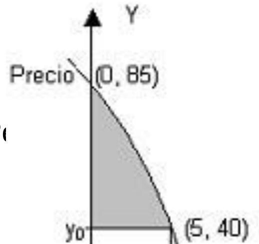


EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si la función de demanda es $y = 85 - 4x - x^2$, hallar el excedente del consumidor. Si $x_0 = 5$.

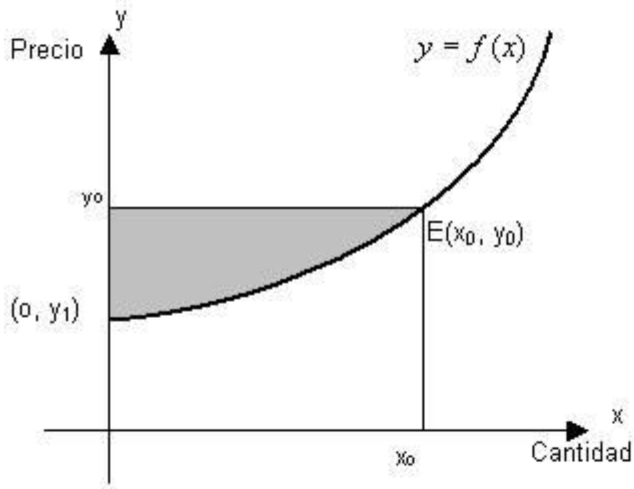
$$\textit{Excedente} \text{ del Consumidor} = \int_0^5 (85 - 4x - x^2)dx - (5)(40)$$

$$\left[85x - 2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^5 - 200 = 333.33 - 200 = 133.33$$



EXCEDENTE PARA EL PRODUCTOR.

"Una función de oferta representa las respectivas cantidades de un artículo que podrían venderse a varios precios. Si el precio en el mercado es γ_0 y la correspondiente oferta en dicho mercado es χ_0, entonces aquellos productores que estuviesen dispuestos a vender artículos a un precio inferior al de mercado, ganan por el hecho de que el precio es γ_0" (Draper, 1976, pág. 430).



Bajo ciertas hipótesis la ganancia total del productor se representa por el área situada encima de la curva de oferta y debajo de la recta y = y_0, llamándose esta área el excedente del productor.

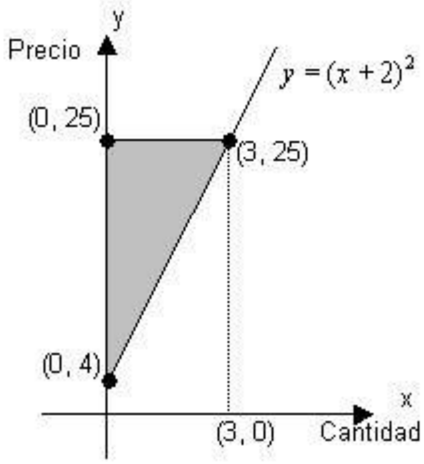
$$\text{Excedente del productor} = x_0 y_0 - \int_0^{xo} f(x)dx$$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1. Si la ley de oferta es y = $(x + 2)^2$ y el precio se fija en y_0 = 25 hallar el excedente del productor.

$$\text{Excedente del productor} = (3)(25) - \int_0^3 (x+2)^2\, dx =$$

$$75 - \left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_0^3 = 75 - 41.67 + 2.67 = 36$$



EJEMPLOS COMBINADO DE OFERTA Y DEMANDA (EQUILIBRIO DE MERCADO).

1. Las funciones de oferta y demanda de cierto producto están dadas por:

Demanda $\Rightarrow p = 1200 - 1{,}5x^2$

Oferta $\Rightarrow p = 200 + x^2$

Determine el excedente del consumidor y del productor, bajo la hipótesis de equilibrio de mercado.

Solución. El punto de equilibrio (x_o, y_o) se obtiene resolviendo las ecuaciones de oferta y demanda, esto es igualando las dos expresiones.

$$1200 - 1{,}5x^2 = 200 + x^2$$

$$-1{,}5x^2 - x^2 = 200 - 1200$$

$$-2{,}5x^2 = -1000$$

$$x^2 = \frac{1000}{2{,}5} = 400$$

$$x = \sqrt{400} = \pm 20$$

Con estos dos resultados tomamos $x_1 = 20$ y descartamos el valor negativo $x_2 = -20$ es inadmisible. Sustituyendo $x_1 = 20$ en cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos que $p = 200 + 20^2 = 600$, por lo tanto los valores de equilibrio $x_0 = 20$ y $p_0 = 600$.

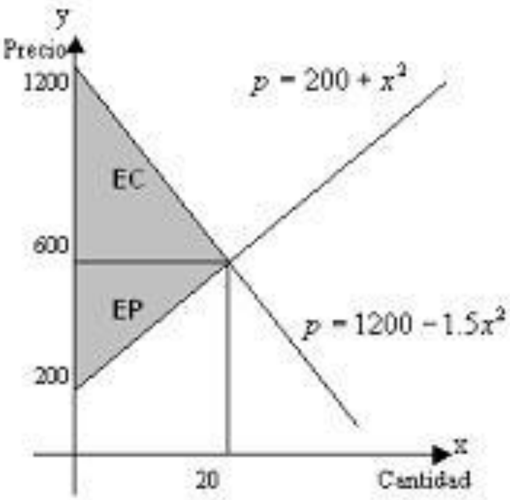
El excedente del consumidor esta dado por:

$$EC = \int_0^{20} (1200 - 1{,}5x^2)dx - (20)(600) =$$

$$\left[1200x - \frac{1{,}5x^3}{3}\right]_0^{20} - 12000 = (24000 - 4000) - 12000 = 8.000$$

$$EP = (20)(600) - \int_0^{20} (200 + x^2)dx =$$

$$12000 - \left[200x + \frac{x^3}{3}\right]_0^{20} = 12000 - (4000 + 2666{,}67) = 5333{,}33$$



2. Hallar el equilibrio de mercado de cierto producto que está dado por:

Demanda $\Rightarrow p = 120 - x^2$

Oferta $\Rightarrow p = 32 + 3x$

Determine el excedente del consumidor y del productor, bajo la hipótesis de equilibrio de mercado.

Solución. El punto de equilibrio (x_o, y_o) se obtiene resolviendo las ecuaciones de oferta y demanda, esto es igualando las dos expresiones.

$$120 - x^2 = 32 + 3x$$

$$x^2 + 3x - 88 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-88)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-3 \pm 19}{2}$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = -11$$

Con estos dos resultados tomamos $x_1 = 8$ y descartamos el valor negativo $x_2 = -11$ es inadmisible. Sustituyendo $x_1 = 8$ en cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos que $p = 120 - 8^2 = 56$, por lo tanto los valores de equilibrio $x_0 = 8$ y $p_0 = 56$.

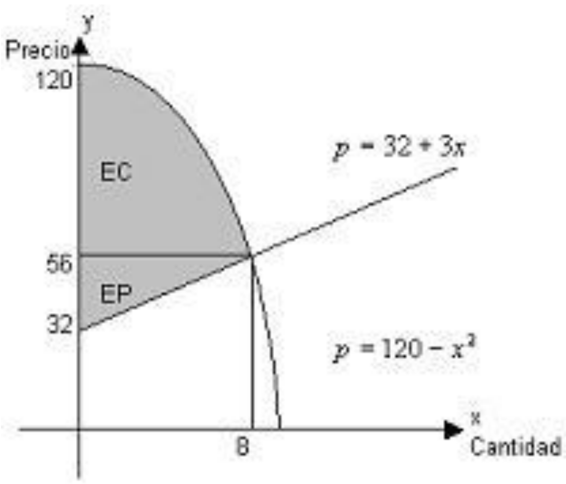
El excedente del consumidor está dado por:

$$EC = \int_0^8 (120 - x^2)dx - (8)(56) =$$

$$\left[120x - \frac{x^3}{3}\right]_0^8 - 448 = (960 - 170.67) - 448 = 341.33$$

$$EP = (8)(56) - \int_0^8 (32 + 3x)dx =$$

$$448 - \left[32x + \frac{3}{2}x^2\right]_0^8 = 448 - (256 + 96) = 96$$



3. Las funciones de oferta y demanda de cierto producto están dadas por:

Demanda $\Rightarrow p = (x-5)^2$

Oferta $\Rightarrow p = x^2 + x + 3$

Determine el excedente del consumidor y del productor, bajo la hipótesis de equilibrio de mercado.

Solución. El punto de equilibrio (x_o, y_o) se obtiene resolviendo las ecuaciones de oferta y demanda, esto es igualando las dos expresiones.

$$(x-5)^2 = x^2 + x + 3$$
$$x^2 - 10x + 25 = x^2 + x + 3$$
$$-10x + 25 = x + 3$$
$$11x = 22$$
$$x = 2$$

$$p = (x-5)^2$$
$$p = (2-5)^2$$
$$p = (-3)^2$$
$$p = 9$$

Con estos dos resultados tomamos que los valores de equilibrio $x_0 = 2$ y $p_0 = 9$. El área formada por estos puntos es de (2) (9) = 18

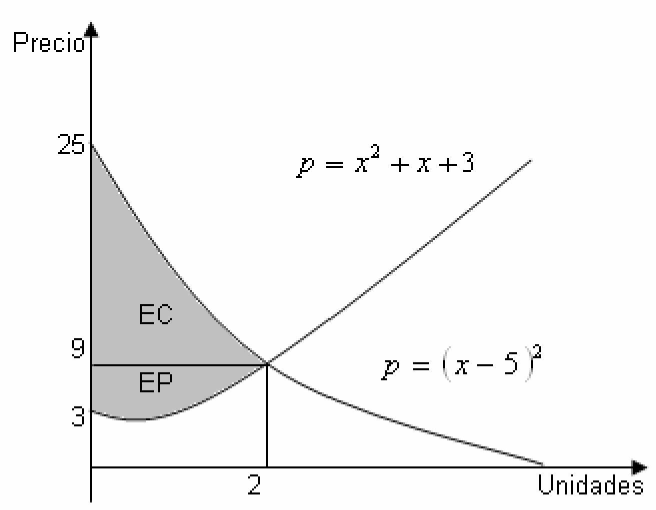
El excedente del consumidor está dado por:

$$EC = \int_0^2 (x-5)^2\,dx - (2)(9) =$$

$$\left[\frac{(x-5)^3}{3}\right]_0^2 - 18 = \left(-\frac{27}{3} + \frac{125}{3}\right) - 18 = 14.67$$

$$EP = (2)(9) - \int_0^2 (x^2 + x + 3)dx =$$

$$18 - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^2 = 18 - \left(\frac{8}{3} + 2 + 6\right) = 7.33$$



4. Las funciones de oferta y demanda de cierto producto están dadas por:

$$\text{Demanda} \Rightarrow p = \frac{370}{x+6}$$

$$\text{Oferta} \Rightarrow p = 3.8 + 0.2x$$

Determine el excedente del consumidor y del productor, bajo la hipótesis de equilibrio de mercado.

Solución. El punto de equilibrio (x_o, y_o) se obtiene resolviendo las ecuaciones de oferta y demanda, esto es igualando las dos expresiones.

$$\frac{370}{x+6} = 3.8 + 0.2x$$

$$370 = (3.8 + 0.2x)(x+6)$$

$$370 = 3.8x + 0.2x^2 + 22.8 + 1.2x$$

$$0.2x^2 + 5x - 347.2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(0.2)(-347.2)}}{2(0.2)}$$

$$x = \frac{-5 \pm 17.4}{0.4}$$

$$x_1 = 31$$

$$x_2 = -56$$

Con estos dos resultados tomamos x_1 = 31 y descartamos el valor negativo x_2 = -56 es inadmisible. Sustituyendo x_1 = 31 en cualquiera de las dos ecuaciones obtenemos que $p = 3.8 + 0.2(31) = 10$, por lo tanto los valores de equilibrio x_0 = 31 y p_0 = 10.

El excedente del consumidor está dado por:

$$EC = \int_0^{31} \frac{370}{x+6}\,dx - (31)(10) = \text{aplicamos el método de sustitución}$$

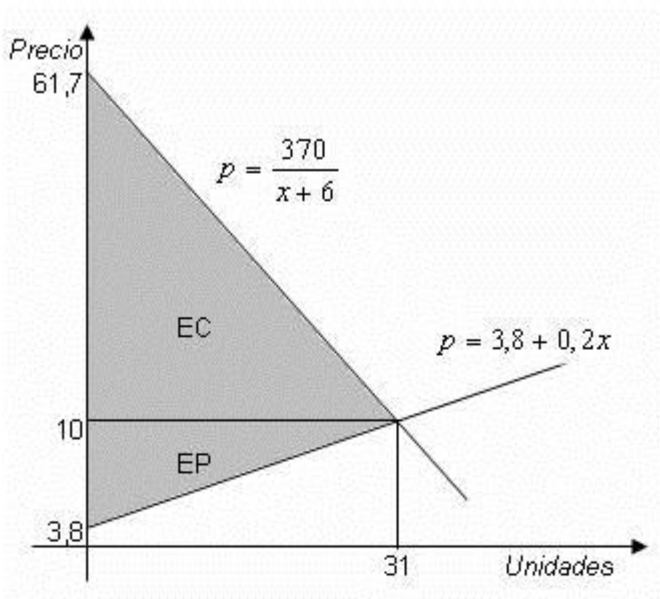
$$u = x + 6 \qquad du = 1$$

$$EC = \left[370\int_0^{31} \frac{1}{u}\,du\right] - 310 = \left[370[\ln u]_0^{31}\right] - 310 = \left[370[\ln(x+6)]_0^{31}\right] - 310 =$$

$$EC = \left[370[\ln(31+6)] - 370[\ln(0+6)]\right] - 310 = [1336.04 - 662.95] - 310 = 363.09$$

$$EP = (31)(10) - \int_0^{31}(3.8 + 0.2x)dx =$$

$$EP = 310 - \left[3{,}8x + \frac{0.2x^2}{2}\right]_0^{31} = 310 - (117.8 + 96.1) = 96.1$$



FUENTES BIBLIOGRÁFICAS:

Arya, J., & Lardner, R. (2009). *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía.* México: Prentice-Hall.

Corporation, ©. M. (2007). *El cálculo integral.* Microsoft ® Encarta ®.

Draper, J. (1976). *Matemáticas para Administración y Economía.* Harla.

Haeussler, E. (2015). *Matemáticas para Administración y Economía.* México: Pearson Educación.

Ing. Rosalba Pesántez Chica, Mgtr.