UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

TEMA 2: FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1 Definición y clasificación de funciones reales de una variable real

Definición 1 *Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A como máximo un único elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.*

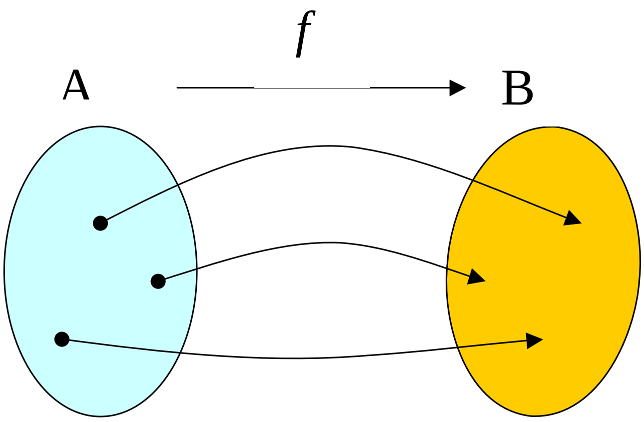


Diagrama de flechas para f

Por ejemplo, el área de una círculo es una función de su radio:

$$A = \pi r^2$$

Si C representa la temperatura en grados centígrados, sabemos que existe una relación con la temperatura medida en grados Fahrenheit, F :

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

En cada uno de estos ejemplos se describe una regla por la cual, dado un número $(r, F, t, x...)$ se asigna otro número $(A, C, w, y, ...)$. En cada caso diremos que el segundo número es función del primero.

Por lo general, consideraremos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales, $\mathbb{R}$, pero estos conjuntos pueden estar formados por elementos muy diferentes, como por ejemplo números enteros, $\mathbb{Z}$, o naturales, $\mathbb{N}$, matrices, polinomios...

Al subconjunto de A formado por aquellos elementos para los cuales existe una imagen se le denomina **dominio** de la función, $Dom(f)$.

Definición 2 *Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definimos el dominio de la función como*

$$Dom\,(f)=\{x\in\mathbb{R}\text{ para el cual existe un } y\in\mathbb{R}\text{ tal que } y=f\,(x)\}$$

El número $f\,(x)$ es el valor que toma la función f en el elemento x.

Definición 3 *La **imagen** o **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f\,(x)$, conforme x varía en el dominio $Dom\,(f)$.*

$$Img\,(f)=Rang\,(f)=\{y\in\mathbb{R}\text{ para el cual existe un } x\in Dom\,(f)\ \text{ tal que } y=f\,(x)\}$$

Si f es una función, se designa a veces por y el valor de f en x :

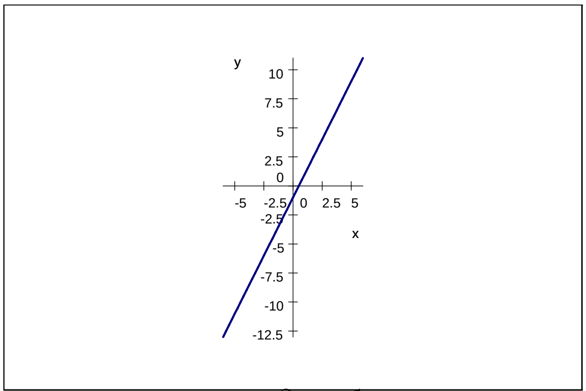
$$y=f\,(x)$$

En esta situación a x se le denomina **variable independiente**, o argumento de f, y a y se le denomina **variable dependiente**, ya que su valor depende del valor de x.

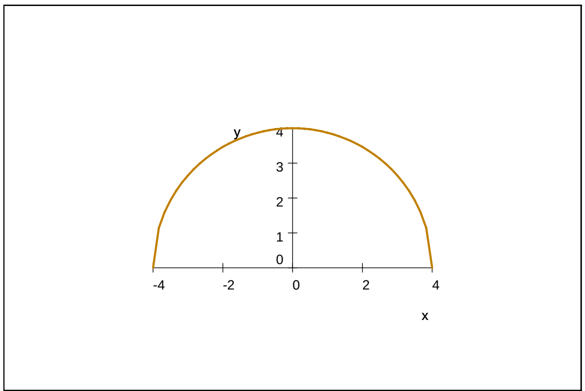
Si se define una función por medio de una fórmula algebráica, adoptamos el convenio de que el dominio consta de todos los valores de la variable independientes x para los cuales la fórmula tiene sentido (a menos que se mencione explícitamente otro).

Toda función dada por una ecuación de la forma $y=f\,(x)$ tiene una representación gráfica. La gráfica de f consta de todos los puntos (x,y) en el plano de coordenadas, tales que $y=f\,(x)$ y x está en el dominio de f.

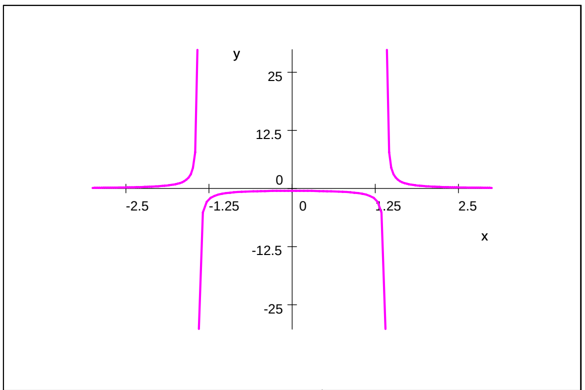
$$\text{Gráfica de } f=\{(x,f\,(x))\mid x\in Dom\,(f)\}$$



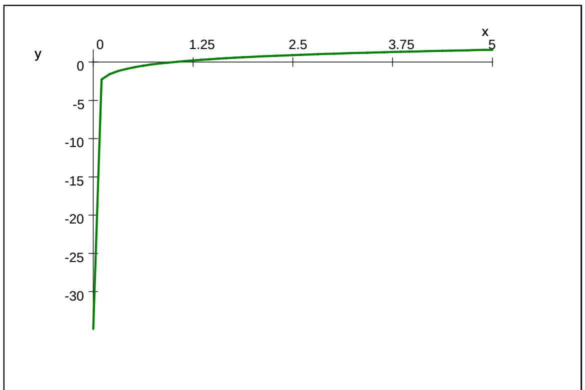
$y=2x-1$



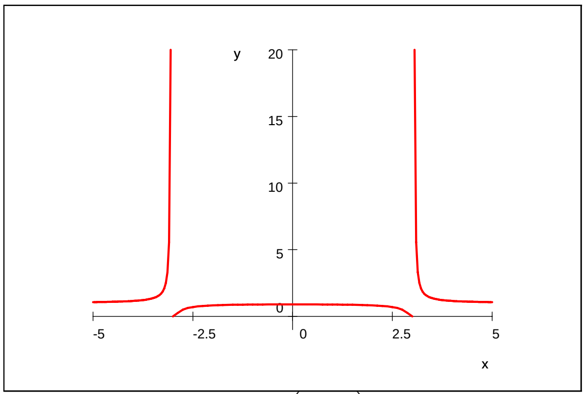
$y=\sqrt{16-x^2}$



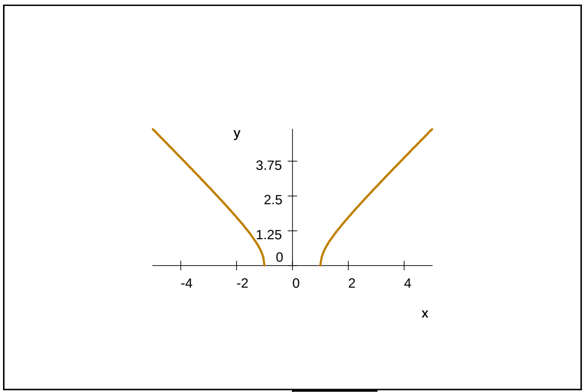
$y=\frac{1}{x^2-2}$



$y=\ln x$



$y = e^{\left(\frac{1}{x^2-9}\right)}$



$y = \sqrt{x^2 - 1}$

1.1 Funciones polinómicas

Una función $P(x)$ recibe el nombre de **polinomio** si:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo que representa el **grado** del polinomio y los números $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ son constantes reales denominadas **coeficientes** del polinomio. Dado cualquier polinomio su dominio siempre es todo $\mathbb{R}$.

1.1.1 Funciones lineales

Un polinomio de primer grado es de la forma

$$P(x) = ax + b$$

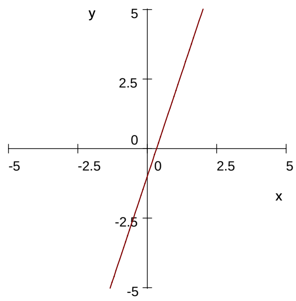
y establece una relación lineal entre las variables x e $y = P(x)$. El número a se denomina **pendiente de la recta** y nos indica cuanto varía la variable y cuando la variable x aumenta una unidad.

$$P(x+1) - P(x) = a(x+1) + b - (ax+b) = ax + a + b - ax - b = a$$

mientras que b representa el corte de la recta de ecuación $y = ax + b$ con el eje Y.

Cuando consideramos una función lineal, la razón de cambio o tasa de variación de la función cuando x aumenta h unidades es un múltiplo de la pendiente de la recta a:

$$P(x+h) - P(x) = a(x+h) + b - (ax+b) = ax + ah + b - ax - b = ah$$



$$y = 3x - 1$$

Distintos modos de calcular la ecuación de una recta

Primero Sabemos que por dos puntos distintos pasa una única línea recta. Supongamos que conocemos dos puntos $P = (x_p, y_p)$ y $Q = (x_q, y_q)$ y queremos saber la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos. La ecuación de la recta sabemos que será de la forma:

$$y = ax + b$$

De manera que si esos dos puntos pasan por la recta deberán satisfacer la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} y_p &= ax_p + b \qquad (1) \\ y_q &= ax_q + b \end{aligned}$$

Si restamos las dos ecuaciones obtenemos:

$$y_p - y_q = a\,(x_p - x_q)$$

Despejando a tenemos:

$$a = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q}$$

Ahora que conocemos el valor de a podemos despejar b de cualquiera de las ecuaciones de (1)

$$b = y_p - ax_p = y_p - \left(\frac{y_p - y_q}{x_p - x_q}\right) x_p$$

Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (3, 5)$ y $Q = (2, 3)$. Aplicando las fórmulas anteriores tenemos que la pendiente de la recta es:

$$\begin{aligned} a &= \frac{5-3}{3-2} = 2 \\ b &= 5 - 2 \cdot 3 = -1 \end{aligned}$$

Por tanto la ecuación de la recta que pasa por los puntos anteriores es:

$$y = 2x - 1$$

Segundo Supongamos a continuación que sabemos cual es la pendiente de la recta, a, y un punto que pasa por ella $P = (x_p, y_p)$ de modo que sólo nos falta por conocer b, pero sabemos que P pertenece a la recta, por tanto satisface:

$$y_p = ax_p + b$$

de aquí podemos despejar b :

$$b = y_p - ax_p$$

de manera que la ecuación de la recta es: $y = ax + (y_p - ax_p)$

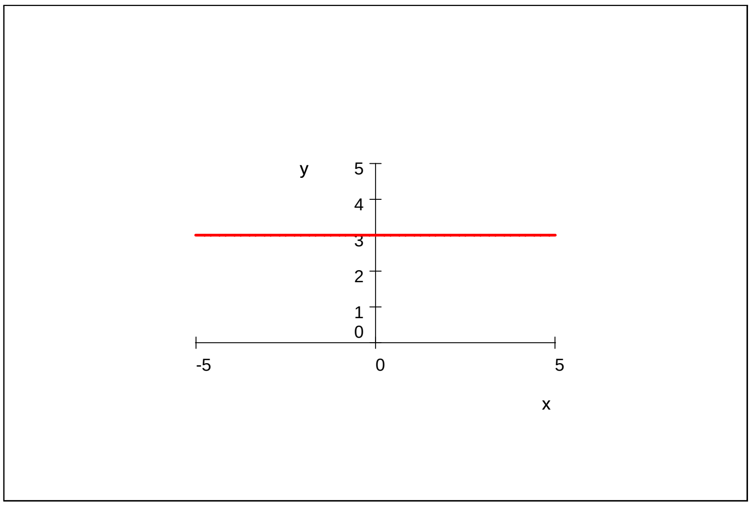
Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (3, 5)$ y tiene de pendiente $a = 3$. Tenemos entonces que

$$b = 5 - 3 \cdot 3 = -4$$

por tanto, la ecuación de la recta es:

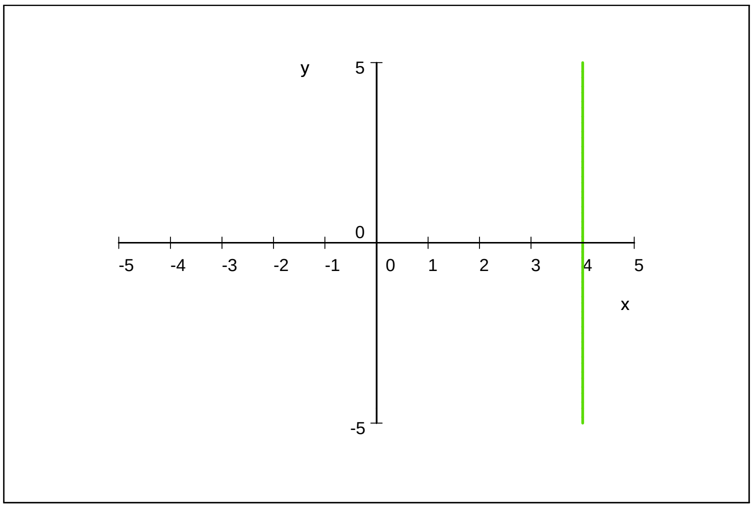
$$y = 3x - 4$$

Recordad que toda recta cuya pendiente sea cero es paralela al eje OX, por ejemplo $y = 3$



$y = 3$

Mientras que toda recta paralela al eje OY no se la puede considerar como función ya que a un mismo valor x le hace corresponder una infinidad de $y's$ distintas.



$x = 4$

Diremos que dos rectas son perpendiculares si ambas se cortan y forman un ángulo de 90°. Si las rectas $y = a_1 x + b_1$ y $y = a_2 x + b_2$ son perpendiculares entonces:

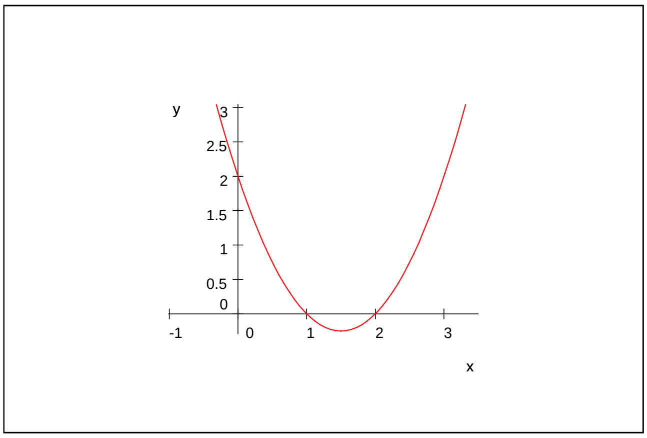
$$a_1 = -\frac{1}{a_2}$$

1.1.2 Otras funciones polinómicas

Un polinomio de segundo grado es de la forma

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

y se llama función **cuadrática.** La gráfica de este tipo de funciones es una parábola.



$y = x^2 - 3x + 2$

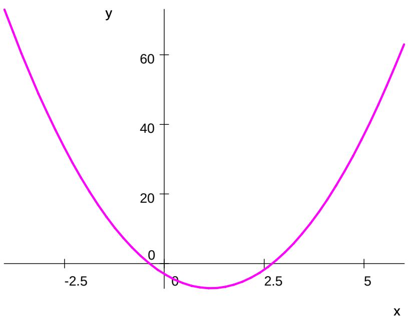
Recordad la fórmula para calcular las raíces de una ecuación de segundo grado del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

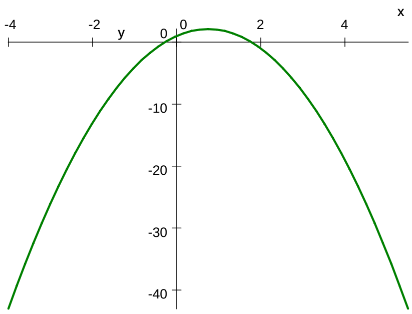
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La solución de la ecuación anterior nos indica los puntos de corte de la parábola con el eje OX. En el caso de la gráfica mostrada podemos ver que los puntos de corte con el eje $0X$ son $x = 1$ y $x = 2$.

Si $a > 0$ entonces la función cuadrática $P(x) = ax^2 + bx + c$ tendrá un **mínimo** en el punto $\left(-\frac{b}{2a}, P\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ y si $a < 0$ entonces tendrá un **máximo** en dicho punto al que se denomina **vértice** de la parábola.



$P(x) = 3x^2 - 7x + 2$



$Q(x) = -2x^2 + 3x + 1$

La parábola $P(x) = 3x^2 - 7x + 2$ tiene un mínimo en el punto $\left(\frac{7}{6}, -\frac{25}{12}\right)$ y la parábola $Q(x) = -2x^2 + 3x + 1$ tiene un máxino en el punto $\left(\frac{3}{4}, \frac{17}{8}\right)$.

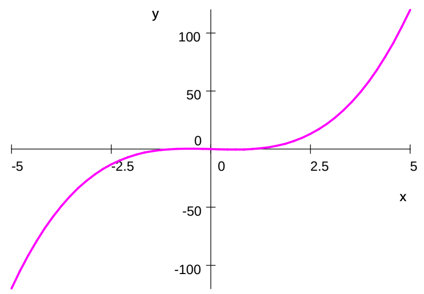
El dominuo de cualquier función cuadrática es siempre toda la recta real. La imagen nunca es toda la imagen real. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ una función cuadrática, $V = (v_x, v_y)$ son las coordenadas del vértice de la parábola entonces:

$$\operatorname{Im} f = \begin{cases} (-\infty, v_y] & \text{si} \quad a < 0 \\ [v_y, \infty) & \text{si} \quad a > 0 \end{cases}$$

Un polinomio de tercer grado es de la forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

y se llama **función cúbica**. Calcular la raíces de una función cúbica es ya un poco más complicado y para ello se deberá recurrir en muchos casos a métodos numéricos. Tanto el dominio como la imagen de cualquier función cúbica es toda la recta real.



$$P(x) = x^3 - x$$

Es importante resaltar que el dominio de cualquier función polinómica es siempre toda la recta real. En el caso de la imagen, todo polinomio de grado impar tiene como imagen toda la recta real, si se trata de un polinomio de grado par, $f(x) = a_{2n}x^{2n} + ... + a_1x + a_0$, tendrá un máximo si $a_{2n} < 0$, en ese caso $\operatorname{Im} f = (-\infty, f_{\max}]$ donde $f_{\max}$ denota el valor máximo que alcanza la función, mientras que la función polinómica $f(x) = a_{2n}x^{2n} + ... + a_1x + a_0$, tendrá un mínimo si $a_{2n} > 0$, en tal caso $\operatorname{Im} f = [f_{\min}, \infty)$ donde $f_{\min}$ denota el valor mínimo que alcanza la función.

1.1.3 Raíces de un polinomio

Todos aquellos valores de x verifican:

$$P(x) = 0$$

se denominan raíces de la ecuación:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales. Si n es impar existe al menos una raíz real, si n es par puede que no exista solución real de la ecuación anterior.

Si todos los coeficientes a_i de la ecuación de orden n son números enteros y $a_n = 1$, entonces todas las raíces enteras posibles deben dividir al término independiente a_0.

¿Cómo calcular las posibles raíces enteras de un polinomio de grado n?

¿Recordáis la Regla de Ruffini?

Supongamos que queremos calcular las raíces enteras del siguiente polinomio:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Los candidatos a ser raíces enteras del polinomio son los divisores de 6, $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Empezamos probando $x = 1$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Por tanto $x = 1$ es una raíz del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Esto también quiere decir que:

$$P(x) = \left(x^2 - x - 6\right)(x - 1)$$

Continuamos aplicando Rufinni, pero ahora sólo buscamos las raíces enteras del polinomio $x^2 - x - 6$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -6 \\ 1 & & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & -6 \end{array}$$

en este caso tenemos que $x = 1$ no es una raíz entera de $x^2 - x - 6$. Por tanto, probamos por otro divisor de 6

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -6 \\ -2 & & -2 & 6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

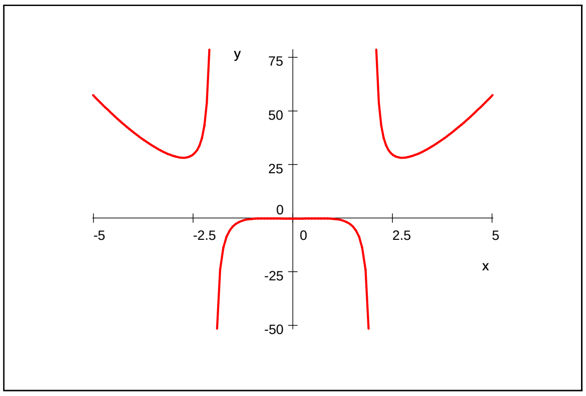
de manera que $x = -2$ es otra raíz entera de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ y por tanto $P(x) = (x-3)(x+2)(x-1)$, de aquí ya vemos que la tercera raíz entera del polinomio $P(x)$ es $x = 3$.

1.2 Funciones racionales

Una **función racional** f es un cociente de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. El dominio de la función $f(x)$ consta de todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$.



$f(x) = \frac{2x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4}$

En este caso la función esta definida en todo $x \in \mathbb{R}$ excepto en $x = \pm 2$, es decir:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\}$$

1.3 Funciones exponenciales

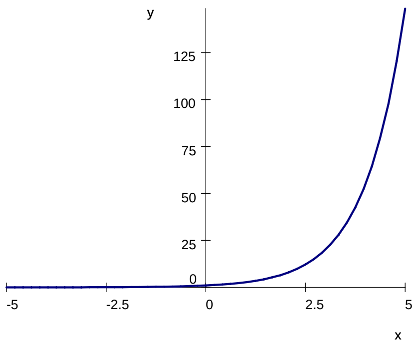
Son aquellas de la forma $f(x) = Aa^x$, donde $A \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. Las funciones exponenciales aparecen en muchos modelos económicos, sociales y físicos. Mediante funciones exponenciales podemos describir modelos de crecimiento económico y el interés acumulado continuamente, este tipo de funciones son también muy utilizadas en estadística.

En matemáticas hay un valor de a que da lugar a una función exponencial mucho más importante que las demás, surge a través de la definición del número irracional siguiente:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

El valor de dicho límite es aproximadamente $e \simeq 2.71828128854....$

Toda función exponencial es por definición siempre continua y su dominio es todo $\mathbb{R}$.



$$y = e^x$$

¿Quién es el conjunto imagen de esta función?

Propiedades de las funciones exponenciales:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $a^x b^x = (ab)^x$
4. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
5. $(a^x)^y = a^{xy}$
6. $a^0 = 1$

1.4 Funciones logarítmicas

La función logarítmica se define como la función inversa de la función exponencial.

Supongamos que realizamos un depósito de 1000 u.m. en una cuenta de ahorro al 8% anual y queremos saber cuanto tiempo tardará en triplicarse la cantidad inicial, para ello deberemos resolver la ecuación siguiente:

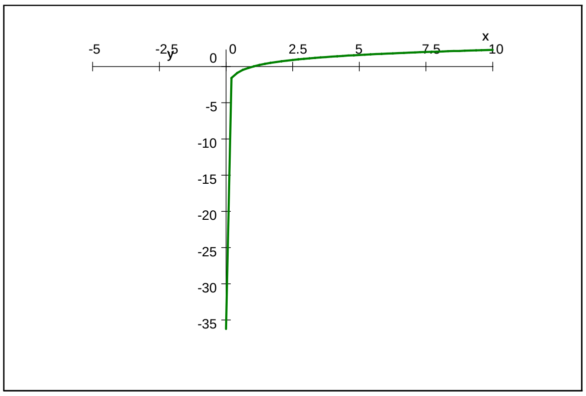
$$1000\,(1+0.08)^t = 3000$$

En dicha ecuación la incógnita es el exponente, t :

$$(1.08)^t = 3$$

buscamos un número tal que 1.08 elevado a t nos dé como resultado 3. A ese número t lo denominaremos logaritmo en base 1.08 de 3.

Definición 4 *Si $a^x = b$ se dice que x es el logaritmo en base a de b, y se escribe $x = log_a b$. En el caso de $e^x = b$, diremos que x es el logaritmo natural de b o logaritmo neperiano, $x = \ln b$.*



$y = \ln x$

Tenemos entonces que se da la siguiente igualdad:

$$e^{\ln a} = a \qquad \text{si } a > 0$$

es decir, $\ln a$ es justamente el número al que tenemos que elevar el número e para obtener como resultado a.

La función logarítmica sólo está definida para los reales positivos y verifica las siguientes propiedades:

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
3. $\ln(x^a) = a \ln x$

4. $\ln e = 1;$ $\quad \ln 1 = 0;$ $\quad \ln 0 = -\infty$
5. $\ln e^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R};$ $\quad x = e^{\ln x} \quad \text{si } x > 0$
6. $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

El dominio de definición de cualquier función logarítmica es el conjunto de los números reales estrictamente positivos, $x > 0$, y es continua en todos los puntos de su dominio. ¿Cuál es el conjunto imagen de la función logarítmica?

1.5 Composición de funciones

Consideremos la función $f : A \to B$ y la función $g : B \to C$. Si el conjunto imagen de f esta contenido en el dominio de g :

$$img\,(f) \subset Dom\,(g)$$

podemos entonces formar la función composición $(g \circ f) : A \to C$, de manera que

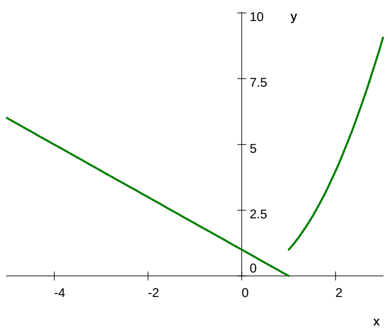
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Supongamos que $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$, tenemos entonces que:

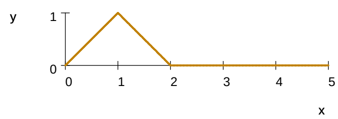
$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(x^2\right) = x^2 + 1 \\
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 \\
(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f\left(x^2\right) = x^4 \\
(g \circ g)(x) &= g(g(x)) = g(x+1) = x + 2
\end{aligned}$$

1.6 Funciones definidas por secciones

En ocasiones una función puede tener una expresión algebráica difente dependiendo de la zona o sección del dominio de la función en la que nos encontremos, dando lugar a las funciones definidas por secciones.



$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

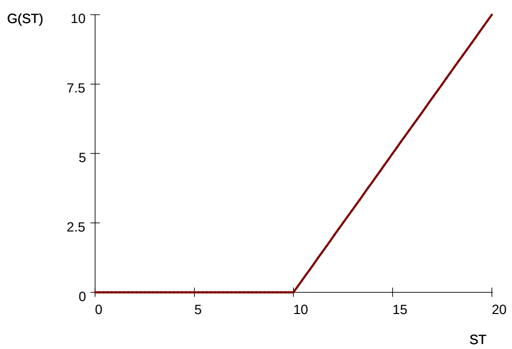


$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

A continuación damos un ejemplo de aplicaciones de las funciones definidas por secciones en el campo de los derivados financieros, muy utilizados en los mercados bursátiles.

Se define una opción de copra (*call option*), como aquel contrato que da a su poseedor el derecho pero no la oblicación de comprar determinado subyacente en una fecha futura (fecha de vencimiento de la obligación) a un precio pactado con anterioridad (precio de ejercicio o *Stricke*). Vamos a calcular la función de pagos de una opción de compra que vence en el momento T y con precio de ejercicio X. Denotaremos por S_T al precio de mercado del subyacente en el momento T.

Supongamos que en el momento T el precio de mercado S_T es menor que el precio de ejercicio. En tal caso al poseedor de la opción no le interesará ejercerla y por tanto su ganancia a través de la opción será cero. Sin embargo cuando el precio de mercado está por encima del precio de ejercicio de la opción el poseedor de la opción la ejercerá y comprará el subyacente a través de la opción de compra en lugar de ir al mercado, en ese caso su ganacia será la diferencia entre el precio de mercado y el precio de ejercicio del subyacente $(S_T - X)$. De modo que su función de pagos viene definida por:



$$G\left(S_T\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T \leq X \\ S_T - X & \text{si } S_T \geq X \end{cases} \quad \text{donde tomamos } X = 10.$$

Del mismo modo se define una opción de venta (*put option*), como aquel contrato que da a su poseedor el derecho pero no la oblicación de vender determinado subyacente en una fecha futura, a un precio pactado con anterioridad. ¿Cuál sería la función de pagos de una opción de venta que vence en el momento T y con precio de ejercicio X?

EJERCICIOS:

1. Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$	b. $f(x) = \sqrt{1-x}$	c. $f(x) = \ln(x^2-4)$
d. $f(x) = \sqrt{x^2-6x}$	e. $f(x) = \frac{3x-4}{x^2-6x-7}$	f. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$
g. $f(x) = \ln(x^2-9)$	h. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+4}}$	i. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$
j. $y = 2x-1$	k. $y = \sqrt{16-x^2}$	l. $y = \frac{1}{x^2-2}$
m. $y = \ln x$	n. $y = e^{\frac{1}{x-3}}$	ñ. $y = \sqrt{x^2-1}$

2. Un negocio cuyo capital original es de 25.000 €, tienes ingresos y gastos semanales de 6.500 € y 4.800 €, respectivamente. Si se conservan todas las ganacias, expresar el valor V del negocio al final de t semanas, como una función de t.

3. Si una máquina de 30.000 € se deprecia un 2% de su valor original cada año, determinar una función f que exprese el valor V de la máquina después que han transcurrido t años.

4. Supongamos que la función de demanda anual para que cierto actor protagonice una película es $p = \frac{1.200.000}{q}$, donde q es el número de películas que protagoniza durante el año. Si el artista actualmente cobra 600.000 € por película, ¿cuántas protagoniza cada año? Si quiere protagonizar cuatro películas por año, ¿cuánto cobrará por esto?

5. Estudiar su dominio y dibujar las siguientes funciones:

   (a) $h(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{2(x-1)}{x^2-1} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

   (b) $g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ \ln x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

6. Encontrar las raíces enteras de los siguientes polinomios:

   (a) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

   (b) $P(x) = x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 4x - 20$

7. Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (2,-3)$ y $Q = (1,5)$. ¿ Cuánto vale la pendiente de la recta?

8. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (2,2)$ y tiene una pendiente igual a 3.

9. Una recta L pasa por el punto $(1,1)$ y tiene pendiente 3. Otra recta M para por los puntos $(-1,2)$ y $(3,1)$. Hallar las ecuaciones de las rectas L y M, así como su punto de intersección.

10. El coste total y de producir x unidades de un cierto bien es una función lineal. En una ocasión, se hicieron 100 unidades con un coste de 200 u.m, y en otra se hicieron 150 unidades por 275 u.m. Hallar la ecuación lineal para el coste total en términos del número x de unidades producidas.

11. El gasto C de un hogar en bienes de consumo está relacionado con el ingreso familiar y de la manera siguiente: Cuando los ingresos son de 1000 Euros se gastan 900, y cada vez que los ingresos aumentan en 100 Euros los gastos lo hacen en 80 Euros. Suponiendo que la relación entre ingresos y gastos es lineal, hallar la función que las describe.

12. Hallar las raíces enteras de las siguientes ecuaciones:

    a. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
    b. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$
    c. $x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 38x^2 - 43x + 15 = 0$
    d. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

13. La población de una ciudad de 5000 habitantes crece a razón de un 3% anual. Determinar una ecuación que proporcione la población después de t años a partir de ahora y encontrar la población dentro de 3 años.

14. A causa de una recesión económica, la población de cierta área urbana disminuye a razón de un 1.5% anual. Al inicio había 350000 habitantes. ¿Cuántos habrá después de 3 años?

15. Resolver las siguientes ecuaciones:

    (a) $e^{-0.4t} = 8$
    (b) $\frac{50}{1+4e^{0.2t}} = 20$
    (c) $4e^{t-1} = 4$

16. Si $\log_y x = 3$ y $\log_z x = 2$, encontrar una fórmula para z como función explícita que dependa solo de y.

17. La función de demanda para cierta marca de CDs esta dada por:

$$p = D(x) = -0.01x^2 - 0.2x + 8$$

    donde p es el precio unitario al por mayor, en Euros, y x es la cantidad demandada cada semana, en unidades de millar. Trazar la curva de demanda correspondiente. ¿Por encima de qué precio al por mayor no existe demanda? ¿Cuál es la cantidad máxima demandada por semana?

18. La gerencia de la compañía de neumáticos Titán ha determinado que las funciones semanales de demanda y oferta de sus neumáticos Super Titán están dadas por:

$$\begin{aligned} p_D &= D(x) = 144 - x^2 \\ p_O &= O(x) = 48 + 0.5x^2 \end{aligned}$$

donde tanto p_D y p_O son los precios de demanda y oferta respectivamente y se miden en Euros y x en unidades de centena. Determinar la cantidad y el precio de equilibrio, es decir, precio y cantidad donde la oferta es igual a la demanda.

19. La compañía de arrendamiento de camiones "Súper Car" alquila un camión de cierto tamaño a 30 Euros el día y 15 céntimos el kilómetro recorrido, mientras que la compañía "Todo transporte" alquila el mismo tipo de camión a 25 Euros el día y 20 céntimos el kilómetro recorrido.

    (a) Determinar el coste diario de renta de cada compañía, en función de los kilómetros recorridos.

    (b) Trazar las gráficas de las don funciones en el mismo gráfico.

    (c) ¿Qué compañía debe elegir un cliente para alquilar un camión por un día, si planea recorrer a lo sumo 70 kilómetros y quiere minimizar sus costes?

20. Calcular $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ siendo f y g las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = \ln x + x^2, \qquad g(x) = \frac{1}{x} + 3$

    (b) $f(x) = \cos x + e^x - x^2, \qquad g(x) = 3\ln(x^2+2)$

    (c) $f(x) = e^x, \qquad g(x) = \ln x$

21. Un fabricante determina que el número total de unidades de producción por día, q, es una función del número de empleados, m, donde

$$q = f(m) = \frac{40m - m^2}{4}$$

El ingreso total, r, que se recibe por la venta de q unidades está dado por la función g, doonde $r = g(q) = 40q$. Determinar $(g \circ f)(m)$. ¿Qué es lo que describe esta función compuesta?

2 Límite y Continuidad de una función

Definición 5 *Diremos que la función f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a x_0*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si los valores de $f(x)$ se pueden aproximar tanto como queramos a L cuando x está sufucientemente próximo pero no igual a x_0.

También podemos decir que el límite de una función existe cuando existen los límites laterales y además estos coinciden:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

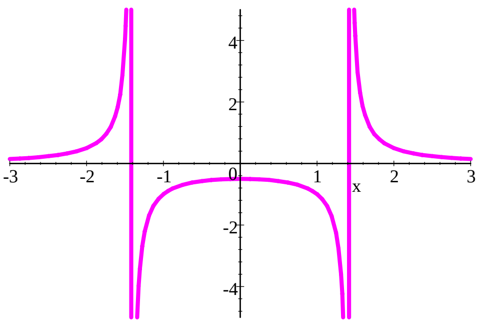
Propiedades de los límites: Supongamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$, donde $L \in \mathbb{R}$ y $M \in \mathbb{R}$ entonces:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = L \pm M$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = L \cdot M$
3. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$.
4. $\lim_{x \to x_0} Af(x) = A \lim_{x \to x_0} f(x) = AL$ para todo $A \in \mathbb{R}$.
5. $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^r = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^r = L^r$.
6. $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = [\lim_{x \to x_0} f(x)]^{\lim_{x \to x_0} g(x)} = L^M$

Definición 6 *Diremos que una función es* ***continua*** *en un punto si se cumplen las condiciones siguientes:*

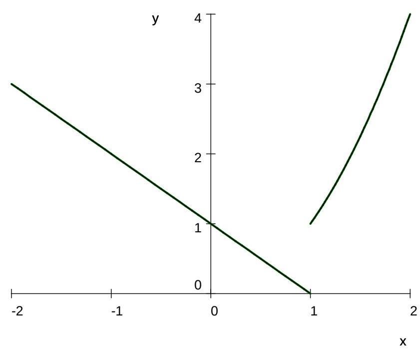
1. *La función está definida en x_0, es decir, $x_0 \in Dom(f)$*
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existe*
3. $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

Por ejemplo la función mostrada en el dibujo vemos que es continua en todos los puntos de su dominio, donde $Dom(f) = \{x \neq \pm\sqrt{2}\}$. Es decir, la gráfica de esta función presenta dos rupturas en los puntos $x = \sqrt{2}$ y en $x = -\sqrt{2}$, justamente en los puntos donde la función no está definida.



$$y = \frac{1}{x^2-2}$$

En otros casos puede que la función esté definida en todo punto pero que aun así existan puntos de discontinuidad como es el caso siguiente. La siguiente función que vemos, está definida en todo punto $x \in \mathbb{R}$, sin embargo presenta una discontinuidad de salto en el punto $x = 1$.



$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Cualquier polinomio de grado n está definido en todo el conjunto de los números reales y es siempre una función continua.

Teorema 1 *(TEOREMA DE BOLZANO)*
Si f es continua en [a,b] y $f(a)f(b) < 0$ *entonces existe c*$\in$*(a,b) tal que* $f(c) = 0$.

Teorema 2 *(TEOREMA DE DARDOUX O DEL VALOR INTERMEDIO)*
Si f es continua en [a,b] entonces f toma todos los valores entre f(a) y f(b)

Teorema 3 *(TEOREMA DE WEIESTRASS)*
Si f es continua en [a,b] entonces f es acotada en [a,b] y alcanza un valor máximo y un valor mínimo sobre [a,b].

Definición 7 *Diremos que la recta $y = a$ es una **asíntota horizontal** de la función $f(x)$ si:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

*Diremos que $x = b$ es una **asíntota vertical** de $f(x)$ si:*

$$\lim_{x\to b} f(x) = \pm\infty$$

*Diremos que la recta $y = ax + b$ es una **asíntota oblicua** de $f(x)$ si:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

y

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = b$$

Ejercicios:

1. Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x^3-27}}{\sqrt[3]{x^2+6x-27}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^5-a^5}}{\sqrt{x^7-a^7}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{5^x}{3^x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{10^{20}+x}{x^2-1}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{5^x}{3^x}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\frac{6x+2}{2x-5}\right)^{3x+1/4}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\frac{5x-1}{x+4}\right)^{x/(x^2+1)}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\sqrt{x^4-2x^2+5}-\sqrt{x^4+3x^2-2x+1}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{3(x-1)}{(x-1)(x+2)}\right)^{(x+2)/(x-1)}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x+1)^{1/x}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{3x}{x^2+1}\right)^{x^3-1}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\frac{5x+4}{5x}\right)^{5x^2+1}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{3x}{x^2+1}\right)^{x/(x^3-1)}$

(q) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x^3-8x^2+17x-10}}{\sqrt{x^2-6x+5}}$

(r) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-2}{x^2+3}\right)^{2x^2+1}$

(s) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-2}$

(t) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^3-4x^2+6x-4}}{\sqrt{x^4-2x^3-4x^2+10x-4}}$

(u) $\lim_{x\to\infty} \left(2-\frac{x-5}{x-3}\right)^{2x+1}$

(v) $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-x-1}}$

2. Dibujar las siguientes funciones y examinar si son continuas:

a. $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x<2 \\ x^2 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$ b. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad -1\leq x \\ \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si} \quad -1<x<1 \\ \frac{1}{2}x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$ d. $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x-3 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

3. ¿Para que valor de a es continua la siguiente función para todo a?

$$f(x) = \begin{cases} ax-1 & \text{para } x\leq 1 \\ 3x^3+1 & \text{para } x>1 \end{cases}$$

4. Supongamos que las funciones f y g son discontinuas esn $x=a$. ¿Son $f+g$ y $f\cdot g$ necesariamente discontinuas en $x=a$? En caso contrario, dar ejemplos.

5. Sea f la función definida por $f(x)=x^2-2$ cuando $x<0$ y $f(x)=-3x^2+15$ cuando $x>2$, Definir $f(x)$ como una función lineal en $[0,2]$ de tal forma que f sea continua?

6. Demostrar que si $f(x)=P(x)/Q(x)$ es una función racional, donde el grado del polinomi $P(x)$ es una unidad mayor que el grado del polinomio $Q(x)$ entonces $f(x)$ tiene una asíntota oblicua. Usar este resultado para calcular las asíntotas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, **b.** $f(x) = \frac{2x^3-3x^2+3x-6}{x^2+1}$

c. $f(x) = \frac{3x^2+2x}{x-1}$, **d.** $f(x) = \frac{5x^4-3x^2+1}{x^3-1}$

7. Considerar la siguiente función de costes definida por

$$C(x) = A\frac{x(x+b)}{x+c}+d$$

para $x\geq 0$ donde A,b,c y d son constantes positivas. Hallar las asíntotas.

8. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a. $$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 \le x < 2 \\ x^3 - 1 & 2 \le x < 3 \end{cases}$$

b. $$f(x) = \begin{cases} x+3 & x \le 0 \\ 3x & 0 < x < 2 \\ x^2+1 & x = 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$$

c. $$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^x+1} & x \le 0 \\ \frac{1}{2}(x^2+1) & x > 0 \end{cases}$$

d. $$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^x+1} & x \le 0 \\ (x^2+1) & x > 0 \end{cases}$$

9. Probar que la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 4 = 0$ tiene al menos una raíz real en (1,2). Análogamente la ecuación $x^3 + 2x - 1 = 0$ en (0,1)

10. Sean f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: definidas como:

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}, \qquad g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \ge 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f, g, $g \circ f$ y $f \circ g$

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calcular a en función de b y c para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x & \text{si } x < c \\ ax + b & \text{si } x \ge c \end{cases}$$

12. Sea g una función continua en $x = 0$, $g(0) = 0$ y tal que$|f(x)| \le |g(x)|$ .Demostrar que f es continua en $x = 0$.

13. Suponer que f y g son continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún $x \in [a, b]$.

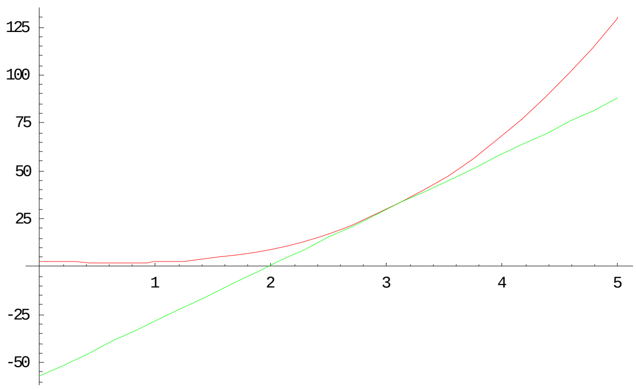
14. Suponer que f es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ está en $[0, 1]$, es decir $f(x) \in [0, 1]$ para toda $x \in [0, 1]$. Demostrar que $f(x) = x$ para algún $x \in [0, 1]$.

15. Las acciones de cierta empresa se contizavan a 150 Euros a la apertura del mercado y a 300 Euros al cierre del mismo. Al día siguiente esas mismas acciones se negocian a 300 Euros a la apertura y a 150 Euros al cierre del mercado. Demostrar, tanto gráficamente como analíticamente, que hubo una hora del día en la cual en ambos días las acciones tuvieron se cotizaron al mismo precio.

3 Derivabilidad. Propiedades de las funciones derivables

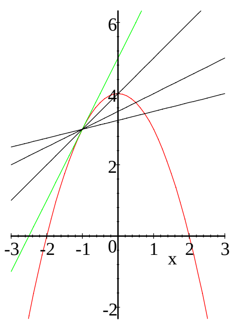
Cuando estudiamos función del tipo $y = f(x)$, nos gustaría saber cómo varía la variable dependiente y cuando varía la variable x. Esto es equivalente a estudiar la inclinación de la gráfica de la función en un punto determinado. Sabemos que cuando tenemos la ecuación de una recta $y = ax + b$, el número a no sólo nos indica la pendiente de la recta, es decir, el grado de inclinación de la misma, sino que también nos indica cuánto varía la variable y cuando varía la variable x una unidad. Cuanto mayor sea a mayor será la variación de la variable y y cuanto menor sea a más insensible será la variable y ante cambio en la variable x.

Pero, ¿cómo medir la inclinación de la gráfica de una función cualquiera en un punto determinado? Una respuesta a esta pregunta es definir la inclinación de una curva en un punto como la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.



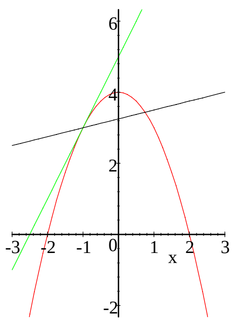
Recta tangente en $x = 3$

¿Cómo calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto x_0? Como se puede observar en el dibujo la recta tangente no es más que el límite de rectas secantes que pasan por el punto $(x_0, f(x_0))$.



Recta tangente como límite de rectas secantes

Consideremos el siguiente gráfico:



Recta tangente como límite de rectas secantes

Vamos a calcular cual es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$. Para ello consideramos la recta secante que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. La pendiente de la recta secante no es más que:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

La pendiente de la recta tangente será el límite del cociente anterior cuando h se hace cada vez más pequeño, y si ese límite existe lo definiremos como derivada de f en el punto x_0 y lo denotaremos por $f'(x_0)$, también diremos que f es diferenciable en x_0,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Si f es diferenciable en todos los puntos de su dominio diremos entonces que la función es diferenciable.

Definición 8 *Si una función es derivable en $x_0 \in Dom(f)$ entonces la ecuación de la* ***recta tangente*** *que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene por ecuación:*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

3.1 Tasas de variación y su significado económico

Supongamos que los rendimientos de dos activos X e Y están relacionados por la siguiente función $y = f(x)$, es decir, cuando el activo X ofrece un rendimiento de a unidades el activo Y ofrece un rendimiento de $f(a)$ unidades. Si el rendimiento del activo X se incrementa en h unidades el incremento o decremento en el rendimiento del activo Y será $f(a+h)$. La variación del rendimiento del activo Y con relación a la variación del rendimiento del activo X se denomina **tasa de variación media** de f en el intervalo $[a, a+h]$ y es igual a:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{tasa de variación media}$$

Si hacemos que el incremento de variación, h, sea cada vez menor de tal modo que llegue a ser cero lo que obtendremos será la **tasa de variación instantánea:**

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{tasa de variación instantánea}$$

3.2 Reglas de derivación

Si f y g son dos funciones diferenciables entonces también lo será $F(x) = f(x) + g(x)$ y $G(x) = f(x) - g(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ G'(x) &= f'(x) - g'(x) \end{aligned}$$

Si f y g son dos funciones diferenciables y $g(x) \neq 0$ para todo $x \in Dom(g)$ entonces $H(x) = f(x) \cdot g(x)$ y $P(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ también son diferenciables:

$$\begin{aligned} H'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ P'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

Regla de la cadena Si f y g son dos funciones diferenciables entonces también lo será $F(x) = (f \circ g)(x)$:

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Reglas de derivación Damos a continuación una lista de reglas de derivación.

		Ejemplos	
$f(x) = a$ constante	$f'(x) = 0$	$f(x) = 3$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$		
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$		
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$		
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$		
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$		
$f(x) = ag(x)$	$f'(x) = ag'(x)$	$f(x) = 3\cos x$	$f'(x) = -3\sin x$
$f(x) = g^n(x)$	$f'(x) = ng^{n-1}(x)\, g'(x)$	$f(x) = (2x-3)^3$	$f'(x) = 3(2x-3)^2\, 2$
$f(x) = \ln g(x)$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$	$f(x) = \ln(x^3 - 3x + 2)$	$f'(x) = \frac{3x^2-3}{(x^3-3x+2)}$
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = g'(x)\, e^{g(x)}$	$f(x) = e^{\sin x}$	$f'(x) = \cos x e^{\sin x}$

3.2.1 Derivación logarítmica

Supongamos que $g(x)$ y $h(x)$ son diferenciables, entonces también lo son $f(x) = a^{g(x)}$ y $f(x) = h(x)^{g(x)}$. ¿ Cómo calculamos las derivadas de estas funciones?

Por ejemplo, consideremos $f(x) = a^{g(x)}$, si tomamos logaritmos en ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\ln f(x) = \ln a^{g(x)} = g(x) \ln a$$

derivando en ambos lados de la igualdad:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) \ln a$$

despejando $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x)\, g'(x) \ln a = a^{g(x)} g'(x) \ln a$$

Ejemplo:
$f(x) = 3^{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = 2x3^{x^2} \ln 3$

Si consideramos a continuación $f(x) = h(x)^{g(x)}$, de nuevo tomando logaritmos en ambos lados tenemos:

$$\ln f(x) = \ln h(x)^{g(x)} = g(x) \ln h(x)$$

derivando en ambos lados de la igualdad:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) \ln h(x) + g(x) \frac{h'(x)}{h(x)}$$

despejando $f'(x)$:

$$f'(x) = h(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln h(x) + g(x) \frac{h'(x)}{h(x)} \right]$$

Ejemplo:
$f(x) = (3 \sin x + x^2)^{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = (3 \cos x + x^2)^{x^2} \left[2x \ln (3 \cos x + x^2) + x^2 \frac{3 \cos x + 2x}{3 \sin x + x^2} \right]$

EJERCICIOS:

1. Derivar las funciones siguientes:

$f(x) = x^3 + 2x - 3$	$f(x) = \ln(e^x + 1)$	$f(x) = \ln(\ln x)$
$f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$	$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$	$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$
$f(x) = e^{\sin x^3}$	$f(x) = e^{x^3} \ln x^2$	$f(x) = x \ln(x+1)$
$f(x) = \ln(\cos x \sin x)$	$f(x) = 3^{(2x-2)^2}$	$f(x) = e^{\ln x^2}$
$f(x) = \cos^2 x$	$f(x) = \cos(x^3 - 2x + 2)^3$	$f(x) = (\cos 3x)^2$
$f(x) = \ln(x^3 - 4x^2 + 5)^2$	$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$	$f(x) = (2x-3)^{x^2-1}$

2. Hallar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de las siguientes curvas en los puntos que se indican:

   (a) $f(x) = 3x + 2$ en $(0, 2)$

   (b) $f(x) = x^2 - 1$ en $(1, 0)$

   (c) $f(x) = x^3 - 2x$ en $(1, 1)$

   (d) $f(x) = \frac{3}{x} + 2$ en $(3, 3)$

   (e) $f(x) = \sin(3x + 2)$ en $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

   (f) $f(x) = \ln(3x^2 - 2)$ en $(1, 0)$

   (g) $f(x) = x^4 - \cos x$ en $(0, -1)$

3. El número de personas que ven cierta serie de televisión que lleva varios años en antena se aproxima a la función:

$$N(x) = (60 + 2x)^{2/3} \qquad 1 \leq x \leq 26$$

   donde $N(x)$ (medido en millones) denota el número de espectadores semanales de la serie en la semana x. Hallar la razón de incremento de la audiencia semanal al final de la segunda semana y al final de la semana 12. ¿Cuántos espectadores había en la semana 2 y 24?

4. Un controlador aéreo detecta dos aviones que vuelan en trayectorias perpendiculares y a la misma altura. Uno de ellos dista 150 km de la torre de control y se mueve a 450 km/h. El otro está a 200 km y se desplaza a 600 km/k.

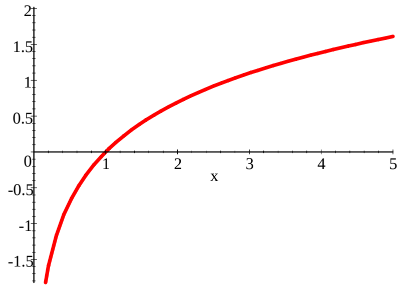
   (a) ¿A qué ritmo decrece la distancia entre los dos aviones?

   (b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para ordenar a uno de ellos que cambie su ruta?

4 Optimización en una variable

4.1 Función creciente y decreciente

Diremos que una función f es **creciente** cuando para todo $x, y \in Dom\,(f)$ con $x \leq y$ se verifica que $f\,(x) \leq f\,(y)$. Diremos que es **estrictamente creciente** si $f\,(x) < f\,(y)$.



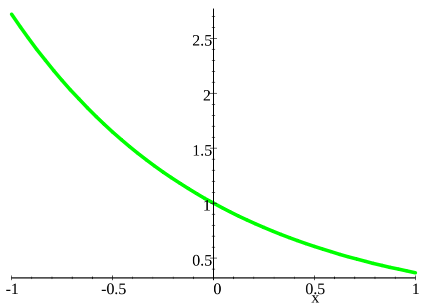
$f\,(x) = \ln x$

Cuando una función es creciente tenemos entonces que para todo $h > 0$, $f\,(x+h) \geq f\,(x)$, por tanto, $f\,(x+h) - f\,(x) \geq 0$, de manera que el límite siguiente es positivo

$$f'\,(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\,(x+h) - f\,(x)}{h} \geq 0$$

De este modo vemos que buscar las zonas de crecimiento de una función se reduce a buscar las regiones del dominio de la función f donde su derivada es positiva.

Diremos que una función f es **decreciente** cuando para todo $x, y \in Dom\,(f)$ con $x \leq y$ se verifica que $f\,(x) \geq f\,(y)$. Diremos que es **estrictamente decreciente** si $f\,(x) > f\,(y)$.



$y = e^{-x}$

Cuando una función es decreciente tenemos entonces que para todo $h > 0$, $f(x+h) \leq f(x)$, por tanto, $f(x+h) - f(x) \leq 0$, de manera que el límite siguiente es negativo

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0$$

De este modo vemos que buscar las zonas de crecimiento de una función se reduce a buscar las regiones del dominio de la función f donde su derivada es negativa.

4.2 Máximos, mínimos

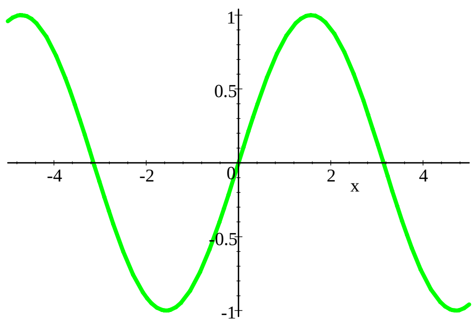
Definition 1 *Diremos que $x_0 \in Dom(f)$ es un **máximo global** de la función f si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x_0 \in Dom(f)$.*

*Diremos que $x_0 \in Dom(f)$ es un **mínimo global** de la función f si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in Dom(f)$.*

Definition 2 *Diremos que $x_0 \in Dom(f)$ es un **máximo local** de la función f si existe un intervalo I al que pertenece x_0 tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.*

*Diremos que $x_0 \in Dom(f)$ es un **mínimo local** de la función f si existe un intervalo I al que pertenece x_0 tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.*

En el caso de una función diferenciable en un intervalo I donde la función presenta un máximo en el punto $x_0 \in I$, en ese punto la función pasa de ser creciente a decreciente, por tanto la función derivada $f'(x)$ pasa de ser positiva a negativa, de manera que en el punto máximo la derivada necesariamente tiene que ser cero. En el caso de la que función presente un mínimo en $x_0 \in I$, en ese caso, la función pasa de ser decreciente a creciente, de manera que $f'(x)$ pasa de ser negativa a positiva, de nuevo en el punto mínimo la derivada necesariamente tiene que ser cero.



$y = \sin x$

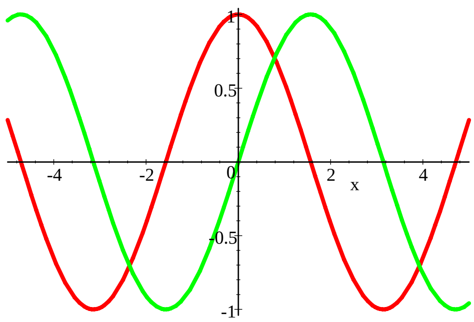
Teorema 4 *Sea f una función diferenciable en $x_0 \in Dom(f)$, si x_0 es un máximo o mínimo de la función entonces*

$$f'(x_0) = 0$$

Sigamos razonando. En el caso de que la función sea dos veces diferenciable en un punto máximo, la pendiente de la función cerca de dicho punto pasa de ser creciente a decreciente, es decir, la pendiente de la función es decreciente en un entorno del punto x_0. Como ya hemos mencionado anteriormente, al ser la función $f'(x)$ es decreciente en un entorno de x_0, se tendrá entonces que $f''(x_0) \leq 0$.

De modo similar si en x_0 existe un mínimo de la función entonces $f''(x_0) \geq 0$.

$y = \cos x$



$f(x) = \sin x$ y $f'(x) = \cos x$

4.2.1 Cálculo de máximos y mínimos de una función

A continuación resumimos los pasos que hay que realizar para calcular los máximos y mínimos relativos de una función.

Dada una función $f(x)$

1. Resolvemos $f'(x) = 0$, las raíces de esta ecuación serán los candidatos a máximo o mínimo.

2. Sea $x_0 \in Dom(f)$ tal que $f'(x_0) = 0$. Calculamos $f''(x)$

   (a) Si $f''(x_0) < 0$ entonces en x_0 existe un máximo de la función

   (b) Si $f''(x_0) > 0$ entonces en x_0 existe un mínimo de la función

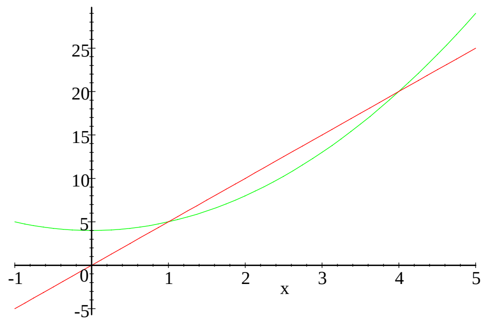
   (c) Si $f''(x_0) = 0$ entonces calculamos $f'''(x)$ y

$$\begin{cases} \text{si } f'''(x_0) \neq 0 \text{ en } x_0 \text{ existe un punto de inflexión} \\ \text{si } f'''(x_0) = 0 \text{ entonces} \\ \begin{cases} \text{si } f^{(4)}(x_0) < 0 \text{ entonces en } x_0 \text{ existe un máximo de la función} \\ \text{si } f^{(4)}(x_0) > 0 \text{ entonces en } x_0 \text{ existe un mínimo de la función} \\ \text{si } f^{(4)}(x_0) = 0 \text{ entonces calculamos } f^{(5)}(x) \text{ y} \\ \begin{cases} \text{si } f^{(5)}(x_0) \neq 0 \text{ en } x_0 \text{ existe un punto de inflexión} \\ \text{si } f^{(5)}(x_0) = 0 \text{ en } x_0 \text{ calculamos } f^{(6)}(x) \text{ y} \\ \begin{cases} \text{si } f^{(6)}(x_0) < 0 \text{ entonces en } x_0 \text{ existe un máximo de la función} \\ \text{si } f^{(6)}(x_0) > 0 \text{ entonces en } x_0 \text{ existe un mínimo de la función} \\ \text{si } f^{(6)}(x_0) = 0 \ldots \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

4.3 Concavidad y convexidad

Diremos que una función es **convexa** en un entorno $I = [a, b] \subset Dom(f)$ si la recta que une los puntos $f(a)$ y $f(b)$ se encuentra por encima de la curva.

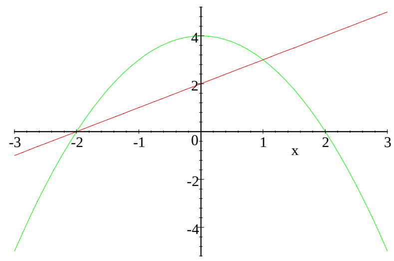
Si nos damos cuenta la pendiente de la función en el intervalo I crece a medida que nos desplazamos a la derecha del intervalo, eso quiere decir que la función $f'(x)$ que mide la pendiente de la función $f(x)$ es creciente, y por tanto $f''(x) \geq 0$.



$f(x) = x^2 + 4$ intervalo $I = [1, 4]$

Por tanto, buscar las zonas donde la función sea convexa es equivalente a buscar los intervalos donde $f''(x) \geq 0$.

De modo equivalente, diremos que una función es **cóncava** en un entorno $I = [a, b] \subset Dom(f)$ si la recta que une los puntos $f(a)$ y $f(b)$ se encuentra por debajo de la curva.

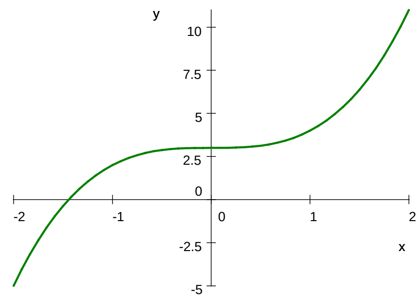


$f(x) = -x^2 + 4$ intervalo $I = [-2, 1]$

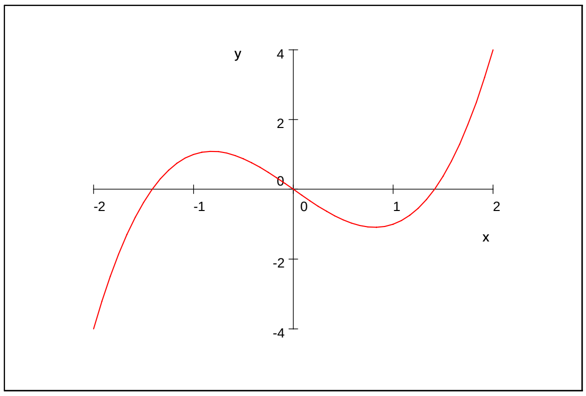
De nuevo nos damos cuenta que la pendiente de la función en el intervalo I decrece a medida que nos desplazamos a la derecha del intervalo, eso quiere decir que la función $f'(x)$ que mide la pendiente de la función $f(x)$ es decreciente, y por tanto $f''(x) \leq 0$.

Por tanto, buscar las zonas donde la función sea cóncava es equivalente a buscar los intervalos donde $f''(x) \leq 0$.

Los puntos donde la función cambia de cóncava a convexa o viceversa se denominan **puntos de inflexión**. De manera que si x_0 es un punto de inflexión $f''(x_0) = 0$.



$f(x) = x^3 + 3$ punto de inflexión $x = 0$



$f(x) = x^3 - 2x$ punto de inflexión en $x = 0$

Obsérvese que en la función $f(x) = x^3 + 3,\ f'(0) = f''(0) = 0,$ mientras que en $f(x) = x^3 - 2x$ se tiene que $f''(0) = 0$ pero $f'(0) \neq 0$.

EJERCICIOS:

1. La filial en México de la compañía Thermo-Master fabrica un termómetro para interiores y exteriores. La gerencia estima que la ganancia que puede lograr la compañía por la fabricación y ventqa de x unidades de termómetros por semana es
$$P(x) = -0.01x^2 + 8x - 5000$$
Euros. Encontrar los intervalos donde la función de ganancia es creciente y los intervalos donde es decreciente.

2. El coste medio, en Euros, de la producción de x discos de larga duración en la compañía de discos Lincoln está dado por
$$\bar{C}(x) = -0.0001x + 2 + \frac{2000}{x} \qquad 0 < x < 6000$$
Mostar que $\bar{C}(x)$ siempre es decreciente en el intervalo $(0, 6000)$.

3. Las ganancias mensuales estimadas que pueden alcanzar la compañía Cannon por la fabricación y venta de x unidades de su cámara modelo $M1$ es:
$$P(x) = -0.04x^2 + 240x - 10000$$
Euros ¿Cuántas cámaras debe producir Cannon cada mes para maximizar sus ganancias?

4. La década de los 80 vio una tendencia hacia detenciones de corte antiguo, opuestas a las políticas penales más liberales y las correcciones con base en la comunidad, populares en la década de los 60 y principios de los 70. Como resultado, las prisiones se sobrepoblaron y se amplió la brecha entre el número de reclusos y la capacidad de las prisiones. Con base en las cifras del Departamento de Justicia de Estados Unidos, el número de prisioneros (en miles) en las cárceles federales y estatales es aproximado mediante la función
$$N(t) = 3.5t^2 + 26.7t + 436.2 \qquad 0 \leq t \leq 10$$
donde t se mide en años y $t = 0$ corresponde a 1984. El número de reclusos para los que fueron diseñadas las cárceles está dado por
$$C(t) = 24.3t + 365 \qquad 0 \leq t \leq 10$$
donde $C(t)$ se mide en miles y t tienen el mismo significado anterior. Mostrar que la diferencia entre el número de prisioneros y la capacidad carcelaria se ha reducido a cada instante t.

5. Las ventas totales S, en miles de Euros, de la corporación de instrumentos de precisión Cannon se relaciona con la cantidad de dinero x que Cannon gasta en la publicidad de sus pruductos mediante la función
$$S(x) = -0.002x^3 + 0.6x^2 + x + 500 \qquad 0 \leq x \leq 200$$
donde x se mide en miles de Euros. Determinar el punto de inflexión de la función S y analizar su significado.

6. Como resultado del mayor coste de la energía, la tasa de crecimiento de las ganancias de la compañía Venice, con cuatro años de antigüedad, ha comenzado a declinar. La gerencia de Venice, después de consultar a expertos en energía, decide implantar ciertas medidas de conservación de la energía para reducir la cuenta de la misma. El director general indica que, de acuerdo con sus cálculos, la tasa de crecimiento de las ganancias de Venice deberá incrementarse de nuevo dentro de cuatro años. Si las ganancias de Venice (en cientos de Euros) dentro de x años están dadas por la función

$$P(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50 \qquad 0 \leq x \leq 8$$

determinar si la predicción del director general es precisa.

7. Un estudio de eficiencia realizado para la compañía de aparatos eléctricos Elektra mostró que el número de walkie-talkies Space Commander ensamblados por el trabajador promedio t horas después de iniciar su jornada de trabajo a las 8 a.m. está dado por

$$N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t \qquad 0 \leq t \leq 4$$

¿En qué momento del turno matutino trabaja el obrero con su máxima eficacia?

8. Una caja de base cuadrada y parte superior abierta debe contener un volumen de 32000 cm^3. Encontrar las dimensiones de la caja que minimice la cantidad de material usado.

9. Determinar el nivel de producción que maximiza el beneficio de una compañía que posee como función de costes y función precio por unidades demandadas:

$$C(x) = 84 + 1.26x - 0.01x^2 + 0.00007x^3 \qquad \text{y} \qquad p(x) = 3.5 - 0.01x$$

10. Por experiencia, el gerente de un complejo de apartamentos de 100 unidades sabe que se ocuparán todas si la renta es de 400 Euros al mes. Una investigación del mercado sugiere que, en promedio, quedará una unidad adicional vacía por cada incremento de 5 Euros en la renta. ¿Cuánto debe cargar el gerente por renta para maximizar el ingreso?

11. Se ha estimado que la producción total de petróleo de cierto pozo petrolero está dada por

$$T(t) = -1000(t + 10)e^{-0.1t} + 10000$$

miles de barriles t días después de iniciar su producción. ¿En qué año el pozo estará produciendo a su máxima capacidad?

12. El valor presente de una propiedad adquirida por un inversor está dado por la función

$$P(t) = 80000e^{\frac{\sqrt{t}}{2} - 0.09t} \qquad 0 \leq t \leq 8$$

donde $P(t)$ se mide en Euros y t es el tiempo en años desde el presente. Determinar el tiempo óptimo para que el inversor venda la propiedad. ¿Cuál es el valor presente óptimo de la propiedad?

5 Teorema del Valor Medio

Supongamos que queremos evaluar el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

no podemos usar directamente los límites para trabajar con este ejemplo ya que el límite del denominador es cero. Para calcular este límite es útil un teorema conocimo como la **Regla de L'Hôpital** que establece que, bajo ciertas condiciones, el límite del cociente de dos funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ coincide con el límite del cociente de sus derivadas:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Su demostració utiliza el resultado conocido como **Teorema general del valor intermedio**.

Teorema 5 (Teorema de Rolle) *Si f es continua sobre* $[a,b]$ *y derivable sobre* (a,b), *y* $f(a)=f(b)$ *entonces existe un número* $c\in(a,b)$ *tal que* $f(c)=0$.

Teorema 6 (Teorema del valor medio) *Si f es continua sobre* $[a,b]$ *y derivable sobre* (a,b), *y* $f(a)\neq f(b)$ *entonces existe un número* $c\in(a,b)$ *tal que*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teorema 7 (Teorema general del valor medio) *Si f y g son diferenciables en un intervalo abierto* (a,b) *y continuas en* $[a,b]$ *y además* $g'(x)\neq 0$ *para todo* $x\in(a,b)$, *existe algún punto* $c\in(a,b)$ *tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Teorema 8 (Regla de Lôpital) *Sean f y g funciones derivables en un intervalo abierto* (a,b) *que contiene al punto x=c, excepto posiblemente en el punto c. Supongamos que* $g\prime(x)\neq 0$ *para todo* $x\in(a,b)$, *excepto posiblemente en el punto c. Si el límite de* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *cuando x tiende a c produce una forma indeterminada 0/0, entonces*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

supuesto que el límite de la derecha existe o es infinito. Este resultado es válido también si el límite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ *produce cualquiera de las formas indeterminadas* $\pm\infty/\pm\infty$.

EJERCICIOS:

1. Calcular los límites siguientes:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$	h. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(1+2e^x)}$
b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$	i. $\lim\limits_{x\to\infty} x^3e^{-x^{x^2}}$
c. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\sin^{-1}x}{2x+x\tan^{-1}x}$	j. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$
d. $\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}\ln x$	k. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$
e. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$	l. $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}}-x$
f. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}$	m. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^3}{x^2}$
g. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\tan x}{\sin x}$	n. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}$

2. La fórmula para el capital producido por una inversión inicial P a una tasa r de interéws compuesto n veces al año, tras t años, es

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Probar que la fórmula límite cuando n tiende a infinito es

$$A = Pe^{rt}$$

3. Aplicar el teorema general del valor medio a las funciones f y g en el intervalo indicado. Encontrar los valores c en el intervalo (a, b) tales que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

   (a) $f(x) = x^3, \qquad g(x) = x^2+1, \qquad [0,1]$

   (b) $f(x) = \sin x, \qquad g(x) = \cos x, \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

4. Sean f y g continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). También $f(a) = g(a)$ y $f''(x) < g''(x)$ cuando $a < x < b$. Demustre que $f(b) < g(b)$. Sugerencia: aplicar el teorema del valor medio a la función $h = f - g$.

5. A las 2:00 p.m. el velocímitro del automóvil indica 30 millas/h. a las 2:10 p.m. indica 50 millas/h. Demostrar que en algún momento entre las 2:00 y 2:10 la aceleración es 120 millas/h, exactamente.

6. Dos corredores arracan al mismo tiempo en una competición y terminan empatados. Demuestre que en cierto momento de la carrera tuvieron la misma velocidad. Sugerencia, estudiar la función $h = f - g$ donde f y g son las funciones posición de cada uno de los corredores.